CÍM

Nyomdai munkák:
Druk-ker Kft.

Felelős vezető:
Markó Péter

ISBN

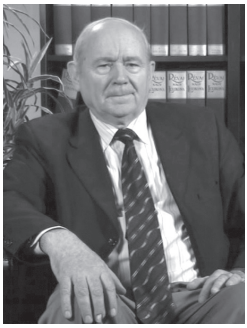
Dr. Ambrus András

CÍM

2018

„Használni akartam, nem tündökölni”
(Váci Mihály)

Dr. Ambrus András



Démokritosz szerint az *„élet ünnepnapok nélkül: hosszú út vendégfogadó nélkül”*. Néha bizony meg kell állni, pihenni, a megtett út alatt szerzett tapasztalatainkat, élményeinket összegezni, s közben akár más utazókkal is elbeszélgetni, egymásnak tanácsot adni, irányt mutatni.

Igaz, ahogy az út menti vendégfogadók különböznek egymástól, ugyanúgy ünnepeink sem egyformák. Nézzük csak a születésnapokat! Máshogy ünnepel egy gyermek, aki a jelen örömeire koncentrál; egy fiatal felnőtt, akinek gondolatai ilyenkor sokszor a jövő felé irányulnak; s aztán eljutunk abba a korba, amikor az életünk mérföldköveit jelző születésnapokon egyre többször kerülnek szóba a múlt eseményei.

Dr. Ambrus András, az ELTE nyugalmazott egyetemi docense 2017 decemberében tölti be 75. életévét, s ebből az alkalomból kollégái, tisztelői, volt tanítványai közül többen is papírra vetették vele kapcsolatos gondolataikat, köszöntő szavaikat. Így született ez a könyv, ami dr. Ambrus András életművének rövid összegzésén túl egyben tisztelgés is a TANÁR ÚR előtt.

Tisztelgés az előtt az egyszerű parasztcsaládból származó, majd felnőttként több nyelven is szólni tudó ember előtt, aki a Kiskőröstől 20 kilométerre található Hetényi-pusztáról indulva jutott el az ELTE tanszékvezetői székéig, sőt vendégprofesszorként Helsinki és Salzburg egyetemi katedráiról is szólhatott hallgatóihoz.

Természetesen a sikerhez vezető út nem volt olyan sima, egyenletes, mint amilyennek így visszafelé tekintve tűnik.

Ahhoz, hogy a gyermek Ambrus András egyáltalán elindul-

hasson rajta, először is szükség volt egy olyan pedagógusra, mint a Sopronból érkezett Kamondy Kálmán.

Ebben a történetben számomra már az is csoda, ahogy a fiatal kántortanító az Alföldre került: a jobb megélhetés reményében az 1920-as években mintegy 28-30 evangélikus kiskőrösi család költözött az egykori tulajdonosról, Hetényi Ákosról elnevezett pusztára, ahol aztán a szorgalmas gazdák nemcsak virágzó tanyákat építettek maguknak, hanem egy iskolát is – azzal a megkötéssel, hogy ott evangélikus oktatás kell, hogy legyen. Ezért hívták az ország távoli szegletéből, a hűség városából a pusztai iskolába Kamondy tanító urat, aki aztán nemcsak a kisebbek oktatását bízta alkalmanként a társai közül gyors észjárásával korán kitűnő Ambrus Andrásra, hanem további útjának egyengetésére is odafigyelt. Szinte az utolsó pillanatban, de keresett egy középiskolát az özvegy édesanyja által egyedül nevelt félárva fiúnak, sőt motorkerékpárjával személyesen el is vitte őt beiratkozni oda.

Ismerve ezt a történetet, már nem is csodálkozom azon, hogy Ambrus András tanár úr még most is heti rendszerességgel hazavonatozik Budapestről Kiskőrösre, hogy egykori középiskolájában – ahol nemcsak mint diák töltött el közel 4 évet, de matematika-fizika szakos tanárként maga is sok fiatalra gyakorolt életre szóló hatást – egy-egy tehetséges diákkal foglalkozzon. Ahogy az ő tanítója szívén viselte diákjai sorsát, ugyanúgy Ambrus András is arra törekedett egész pályafutása alatt, hogy ne csak szaktárgyi ismereteket adjon át a rábízott diákoknak, hallgatóknak, hanem egész személyiségüket fejlessze. Szaktanárként pályája kezdetétől folyamatosan és tudatosan törekedett először saját, majd egyetemi oktatóként hallgatói, a leendő matematikatanárok pedagógiai módszertanának, eszköztárának bővítésére. Ezt bizonyítja, hogy Bevezetés a matematikadidaktikába című könyve alapjegyzetté vált az ELTE matematika szakos hallgatói számára. S hogy életének minden területét mennyire áthatotta hivatása, jól tükrözi, hogy amikor egyházmegyei felügyelőként felkérték egy keresztény jellegű kiadvány ismertetőjének megírására, ő ehhez a feladathoz is egy világhírű matematikadidaktikus, **John Mason** szavait idézve fogott hozzá: **„Vezérlőelvem, hogy én nem tudok megváltoztatni másokat.**

Amit én tehetek: érdemes megváltoztatnom magamat, mert úgy tapasztalom, hogy ennek hatására mások is elkezdik megváltoztatni magukat."

A változás, változtatás szükségességével folyamatosan foglalkozó szemléletmódját jól tükrözi az az 1976-ban írt pályamunkája is, melyben pedagógusi ars poeticáját a következő Váci Mihály-idézettel foglalta össze: **„Használni akartam, nem tündökölni".**

Írta mindezt akkor, amikor még álmodni sem mert egyetemi katedráról, Széchenyi professzori ösztöndíjról, nemzetközi konferenciákról, idegen nyelvű publikációkról. Igaz, a kiskőrösi Petőfi Sándor Gimnázium matematika-fizika szakos tanáraként elért eredményeire – volt olyan év, hogy egyetlen osztályából tizenketten felvételiztek sikeresen matematikából - nem lehetett nem odafigyelni. Pedagógiai munkája elismeréseként már fiatalon, harminckét évesen megkapta az Oktatásügy kiváló dolgozója kitüntetést, ami kapcsán megyei napilapunk, a Petőfi Népe 1975. augusztus 5-én megjelent számában egy közel egyoldalas cikk jelent meg róla.

Hogy az egész életét átható mély hitével – ami aztán majd a gyülekezeti életben vállalt aktív szerepvállalásában is megmutatkozott – vagy származásával magyarázható-e, de már középiskolás tanárként is kiemelt figyelmet fordított a hátrányos helyzetű tanulókra. S bár tehetséggondozó munkája is nagyon sikeres, egy helyen azt nyilatkozta: „…a tehetségesekért feláldozzuk a többséget. Én ezzel a többséggel szeretnék foglalkozni.". S mindezek nem csak üres szavak voltak részéről – volt középiskolai tanítványai közül még ma is sokan emlegetik óráit, melyeken nemcsak a kötelező tananyag átadására volt elég ideje, de a diákokat foglalkoztató egyéb kérdésekre is. Nem csoda, hogy neve fogalommá vált Kiskőrösön. Így amikor gimnáziumunk 50 éves évfordulója alkalmából az akkori iskolavezetés egy életműpályázatot hirdetett, azt a dr. Ambrus Andrással interjút készítő Darin Ildikó nyerte meg.

S bár Ambrus András 1979-ben elfogadta az ELTE állásajánlatát, s búcsút intett mind szülővárosának, mind iskolájának, lélekben mindig is kiskőrösi maradt. Változatlanul ragaszkodik ősei, a kiskőrösi evangélikus tótok hitéhez, követve azt a bibliai gondolatot, miszerint „*Minden gondotokat ő reá vessétek, mert néki gondja*

van reátok.". Kötődik az itt élő emberekhez, akik mindig örömmel fogadják a vele való találkozást – legyen szó akár ma már többdiplomás egykori tanítványról vagy egyszerű parasztemberként megöregedett gyermekkori barátról, ismerősről, távoli rokonról. S változatlanul számíthatnak rá a mostani középiskolás kiskőrösi diákok is, akik közül éles szemmel választja ki a matematikából különösen tehetségeseket.

S amiről eddig még nem esett szó: nemcsak tanárként, nemzetközi tudományos konferenciákon is rendszeresen előadásokat tartó egyetemi docensként állta, sőt állja meg helyét még napjainkban is, de két felnőtt fia – az Amerikai Egyesült Államokban, egyetemi professzorként dolgozó Attila és a Budapesten sportriporterként dolgozó, de szintén közgazdaságtudományi egyetemi végzettséggel is rendelkező Tamás - édesapjaként, sőt öt fiúunokájának nagyapjaként is.

Kedves Tanár Úr! Hetvenötödik születésnapod alkalmából Arany János szavaival kívánok Neked még tartalmas, erőben, egészségben gazdag éveket családod, barátaid, tisztelőid körében:

„Élj soká! és legyen élted,
Mint derűs nap, tiszta, víg,
Mely piros hajnalból támad,
S ismét abban áldozik."

Szentgyörgyiné Szlovák Mária

Ambrus András életútja

Készítette: Darin Ildikó

„Nem az jelöli a származást, rangot,
Hogy kikre büszke valaki,
De az, hogy ővele kik büszkélkednek,
S kik szokták nevét féltve mondani. „

(Váci Mihály)

Ambrus András. Van, akinek semmit sem mond ez a név, van, akinek nagyon is sokat. Például az egykori diákjainak, akiknek még ma is felcsillan a szeme, ha e nevet meghallják.

Eszükbe juttatja azokat a régi szép időket… Hisz valljuk be, sokunknak nem a középiskolai tanáraink, hanem diáktársaink, szerelmeink tették felejthetetlenné a gyermekkor utolsó éveit. Neki viszont sikerült elérnie azt, ami csak nagyon keveseknek adatik meg. A magánéletben boldog, a karrierje sikeres, világszerte ismert. Sokan azt mondják róla, hogy Ő az ember, a példakép. Pedig tanyáról indult. Ma az Eötvös Lóránd Tudományegyetem docense, a Széchenyi professzori ösztöndíj nyertese, a „Teching Mathematics and Computer Science „idegen nyelvű szakfolyóirat szerkesztőbizottságának tagja, nemzetközi konferenciák rendszeres előadója, két alkalommal vendégprofesszor a salzburgi majd helsinki egyetemen, s magáénak tudhat számos idegen nyelvi publikációt is. Beszél németül, angolul, megérti a tót, orosz, lengyel, bolgár, cseh, finn nyelveket.

Sorolhatnám még szakmai munkásságát, de engem inkább az érdekelt, hogy hogyan tudott eljutni az „Értől az Óceánig".

– ***A kezdetekről így mesél Ambrus András:***

– Egyszerű paraszti családból származom. Kiskőröstől 20 kilo-

méterre lévő Dunatetétlen, a hetényi pusztán születtem. Az 1920-as évek elején mintegy harminc kiskőrösi család vásárolt földeket e helyen. Itt építették föl tanyáikat, és a harmincas években egy iskolát is építettek. Az általános iskola nyolc osztályát itt végeztem el. Itt szeretném kiemelni tanítóimat, Kamondy Kálmánt, aki következetesen, szigorral, de mégis nagy szeretettel csiszolgatott bennünket nyolc éven át. Ha valaki nem teljesített egy feladatot – mondjuk nem tanult meg egy verset kívülről –, a tanítás után bent kellett maradnia az iskolában és pótolnia kellett az elmaradását. Biztosan kevesebb ismeretet sajátítottunk el, mint a városi gyerekek, viszont az alapismeretek, képességek terén, mint helyesírási készség, értelmes olvasási képesség, számolási készség, az alapműveletek biztos tudása – stabil alapokat szereztünk. Olyan személyiségjegyek erősödtek meg bennünk, mint a felelősségtudat, a kapott feladat teljesítésének fontossága, a kitartás, akarat, tisztelet a szülők, felnőttek iránt, a tanyasi közösséghez való tartozás tudata, ám mindenekelőtt a segítőkészség. Jellemző a tanítónkhoz való ragaszkodásra, hogy a hetvenedik, hetvenötödik, nyolcvanadik születésnapjára összejött a volt tanítványok serege a mélyen tisztelt, szeretett tanító köszöntésére. Bizony a mi időnkben néha-néha elcsattant egy-egy pofon rendetlenkedés esetén. Akik kapták, az évfordulón még meg is köszönték a szigort, a törődést. Az eredményességet jelzi, hogy a tanyasi iskolából indulva sokan lettünk diplomások. Korán kellett kezdeni a kemény fizikai munkát. Télen az állatok gondozása, tavasztól őszig a mezőgazdasági munkákban kellett részt vennünk, így a tanulásra csak esténként jutott idő, természetesen petróleumlámpa mellett. Özvegy édesanyám négy gyermeket nevelt, szükség volt minden munkáskézre. Bár nyaranként a forróságban nem volt túl kellemes dolgozni, ez is csak a javunkra vált, hisz ez által is fejlődött az akaraterőnk. Az ősi törvény szerint az utódok folytatták a szülők foglalkozását. 1956-ban végeztem el a nyolcadik osztályt, és csak augusztus végén dőlt el tanítóm biztatására és édesanyám nagyfokú támogatásával, hogy beiratkozhattam a kalocsai I. István Gimnáziumba. A forradalom után novembertől a kiskőrösi Petőfi Gimnáziumba jöhettem át, és itt érettségiztem le 1960-ban. Nem volt könnyű kiszakadni a tanyasi világ zárt, meleg légköréből. Mivel

nagyanyáink Kiskőrösön laktak, gyakran meglátogattuk őket, Kiskőrös jelentette a várost, a nagyvilágot számunkra.

– ***Hogyan emlékszik vissza a kiskőrösi gimnáziumi évekre?***

– Szeretettel emlékszem vissza ezekre az évekre, hisz jól éreztem magam ott. Tanáraink szeretetteljes szigorral, követelményeket támasztva neveltek, oktattak bennünket. A városi gyerekek sokkal bőbeszédűbbek voltak, jobban ki tudták fejezni magukat, simulékonyabbak, dörzsöltebbek voltak nálunk. Ez nem tévesztette meg tanárainkat. A tehetséget nézték bennünk és azt nagy gonddal ápolták. Nagyon mélyről indultam el, hiszen 12 éves koromban előfordult, hogy a konfirmációs verset, amit minden rokonnál illett elszavalni, Kiskőrösre érve nem mertem elmondani nagynénémnek, hiába biztatott, kérlelt. Mi tanyasiak a természetes közegben éreztük otthon magunkat, idegen környezetben nagyfokú kisebbségi érzés uralkodott el rajtunk. Erről a szintről kellett elindulnom, ezért is hálás vagyok gimnáziumi tanáraimnak, hogy mellém álltak, támogattak. Két dolgot említenék meg kiskőrösi diákéveimmel kapcsolatban. Mi még egyensapkát viseltünk, ez mindenki számára kötelező volt, mégsem esett nehezünkre. Számomra különösen büszkeséget jelentett, hogy tartozom valahova. Az ötvenes években még kevesen tanultak tovább, megtisztelő volt a kevesek között lenni. Az én rokonságomban én tanulhattam először tovább, ami szintén erősítette bennem az iskolához való ragaszkodást. Nekünk, parasztgyerekeknek a teljes nyarat keményen végig kellett dolgoznunk, így a nyár végén már nagyon vártuk az új tanév kezdetét, szinte megváltás volt számunkra a nehéz fizikai munka után a könnyebb szellemi munka. A másik élményem a szlovák (tót) nyelvtudásommal kapcsolatos. Anyai és apai ágon is elődeim felvidékről Kiskőrösre települt tótok. Kisgyerekként hamarabb tanultunk meg tótul, mint magyarul. Középiskolás koromban nagyanyám többnyire tótul beszélt velem, így nem felejtettem el beszélni. Azért kisebb problémák előfordultak, mivel az orosz közeli rokonnyelv a szlovákkal. Így ha orosz órákon nem volt jelentkező az aktuális olvasmány tartalmának elmondására, én mindig jelentkeztem, hogy szívesen elmondom. Szemkeő tanárnő többször figyelmeztetett: „De nehogy tótul mond el!„ Bár voltak időszakok, amikor nem volt

ajánlatos tót nyelvtudással előhozakodni, számomra a későbbiekben nagy segítséget jelentett. Varsóban, Pozsonyban, Krakkóban, Szófiában, Prágában jól meg tudtam értetni magam. 1990 előtt Budapesten nagyon olcsón lehetett orosz nyelvű szakkönyveket kapni. Sok száz orosz nyelvű szakkönyvem van, melyek tudományos munkám elején nagy segítséget jelentettek számomra. Jellemző volt, hogy több híres nyugat-európai illetve amerikai szerző művét is lefordították oroszra, így jutottam hozzá olcsón e szakkönyvekhez. Diákjaink gyakran mondják egy-egy tantárgyra, témára: ezt nem tanulom meg, soha nem lesz rá szükségem. A fenti példa szerint nem lehet előre tudni, mire lesz szükség a későbbiekben.

– ***Érettségi után vagyunk. Sokan örültek, ha egyáltalán ezt is sikerült elérniük. Ma már természetszerű, akkor egy álom volt csak az egyetemen, főiskolán való továbbtanulás. Ám Ön igyekezett az álmot valóra váltani…***

– Ez így van. Hisz akkor sem volt népszerű a tanári pályát választani. Rokonaim meg is jegyezték: orvos, mérnök, ügyvéd az igazi foglalkozás, miért nem azok közül választottam.

– ***Valóban. Miért nem a kor legnépszerűbb pályái közül választott?***

– Már középiskolás koromban többször is magyaráztam el a matematikát osztálytársaimnak. Többször meg is jegyezték, hogy jobban megértik az én magyarázatomat, mint a tanárét. A matematika jól ment, közel állt hozzám, e szak választása tehát egyértelmű volt. A fizikát annyira nem szerettem, de abban az időben csak matematika-fizika szakpárosítás volt az Eötvös Lóránd Tudományegyetemen.

– ***Hogyan teltek az egyetemi évek?***

– Voltak nehézségek a mi időnkben is. Akkor még együtt tanultunk a matematikus hallgatókkal, ami azt jelentette, hogy a nemzetközi matematikai olimpia győzteseivel kellett fölvennünk a versenyt, ők alkották az élmezőnyt, mi a derékhadat. A legnehezebb időszakokban erőt, bátorítást adott az, hogy egy tanyasi közösséget képviselek, akik bíznak bennem, nem szabad sohasem föladnom. Harmadévre fölküzdöttem magam a jobbak közé, s végül sikeresen megszereztem a matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet 1965-ben.

– ***A diploma megszerzése után rögtön hazatért és egykori gimnáziumában gyakorolta a frissen szerzett tudományát?***

– Ötödévben a budapesti Jedlik Ányos Gimnáziumban tanítottam, akik fölajánlották, hogy tanítsak náluk. Akkor azt válaszoltam, hogy visszavár a megyém, nekem itt van feladatom. A Bács-Kiskun Megyei Tanács ösztöndíjasa voltam, ezért három évet a jánoshalmi Általános Iskola és Gimnáziumban tanítottam. Ezután kerültem Kiskőrösre.

– ***Azóta nem merült fel Önben, hogy későbbi egyetemi pályafutásához nem lett volna előnyösebb Budapesten maradni?***

– Nem, hiszen a vidéken eltöltött 12 év sok hasznos tapasztalathoz juttatott.

– ***Három év jánoshalmi tanítás után 1968-ban visszakerült – igaz, most már tanárként – egykori gimnáziumába. Milyen élmények fűzik ezekhez az évekhez?***

– Kilenc szép, tanulságos évet tanítottam az ekkorra már Kertészeti Szakközépiskolával kibővített gimnáziumban. A jelenlegi tanárok között tanítványaim is vannak: Boldoczki Sándorné és Kelemen Ildikó matematikatanárok és Kispálné dr. Lucza Ilona magyar szakos tanár, múzeumigazgató. Alapelvem volt, hogy segíteni kell a tanulóknak a képességeik lehetőség szerinti kibontakozásában. A kecskeméti, bajai, szegedi középiskolák árnyékában sokat kellett harcolnunk az elismertetésért. Jól emlékszem az első évfolyamra. Egy apa a szülői értekezleten többször is aggódva kérdezte, be fognak-e kerülni egyetemre a gyerekek, mert a szomszédok, rokonok gyakran megjegyzik, miért nem adták „komolyabb" középiskolába. Igyekeztem megnyugtatni az édesapát, be fog kerülni a fia. Nem igazán hitt egy darabig nekem. A fia természetesen bekerült a Műszaki Egyetemre, ma már annak oktatója. Utána még két testvérét tanítottam, mindketten sikeresen bekerültek egyetemre és diplomások lettek. A későbbiek során már jobban bíztak a szülők bennünk. Igyekeztem meggyőzni őket, hogy itthon maradva a szülői házban több pozitív hatás éri a gyereküket, jobban tudják ellenőrizni tanulását, a felvételi példatárakat meg lehet venni, hisz a döntő a gyerek szorgalma, hogy önállóan oldjon meg minél több feladatot. Bekerülve egy nagyvárosi középiskolába, előfordul-

hat, hogy besorolják az osztály második felébe, mivel sok kiemelkedő tanuló is előfordulhat az osztályban. Ettől elkedvetlenedhet, nem tanul olyan akarattal, szorgalommal, mint az elején, mivel őt úgyis a közepesek közé sorolták. Biztos vagyok benne, hogy a kiskőrösi gimnázium mai tanárai is nagy gonddal, kiemelten kezelik a továbbtanulni szándékozó tanulókat. Ez a plusz törődés általában jó eredményekhez vezet. Tanári alapelvem volt, hogy segíteni kell a tanulóknak, hogy tudjanak magukon segíteni. De fontosnak tartottam a tehetséges tanulók felkarolását is. Egy tanulóm az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyen matematikából negyedik helyezést ért el, míg megyei matematikai versenyeken több első helyezést szereztek meg tanítványaim. A „kis iskola" komplexust azzal igyekeztem legyőzni, hogy utolsó évben a felvételiző tanítványaimmal kihívtuk csapatversenyre a kalocsai I. István, a kecskeméti Katona József Gimnázium, a kunszentmiklósi gimnázium, sőt a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnázium felvételizőit. Itt láthatták tanítványaim, hogy hol tartanak, nem kevesebb értékűek, mint a városi iskolák tanulói. A csapatversenyeket általában sikerült megnyernünk. A tehetséges tanulók mellett igyekeztem az átlagos tanulókat is támogatni. Különös gonddal, féltő szeretettel támogattam a kisfalusiakat, ismerve a környezetet, milyen gondokkal kell megküzdeniük. Vonatkozik ez a felnőttképzésre is. A felnőttek sok negatív élménnyel jöttek a levelező tanfolyamra a matematikával kapcsolatban. A bizalom, a segítés itt is eredményes volt. A matematika nagyon absztrakt, nehéz tantárgy, valóban komoly nehézséget okozhat az elsajátítása. Igyekeztem minden tanulóban megtalálni azt a területet, amiben jobb volt, hogy érezze: ő is értékes ember.

– ***A diákból lett tanár nemcsak a kiskőrösi gimnáziumba, hanem az Eötvös Lóránd Tudományegyetemre is visszatért tanítani. Ám az ide vezető út sem volt kalandoktól mentes…***

– Amikor másodszor is behívtak négy hónapra katonának, nagyon el voltam keseredve, mert nem igazán nekem való volt az a stílus, ami a hadseregben divatos volt. Sajnáltam a négy hónapot, elvesztett időnek tartottam. Utólag viszont azt kell mondanom, hogy sokat köszönhetek a négy hónapnak. Az Eötvös Lóránd

Tudományegyetem egyik matematikus tanára is a csoportunkban volt. Ő figyelt föl rám, és ajánlott azoknak, akik a középiskolai matematika szakos tanárképzéssel foglalkoztak ELTE-n. Igaz, hogy több alkalommal nyertem díjakat pedagógiai pályázatokon, igaz, hogy tanítványaim jó verseny és felvételi eredményeket értek el, de szükség volt a már említett közbenjáróra, aki felhívta rám az illetékesek figyelmét. Nem volt könnyű döntés a szülőket itt hagyni Kiskőrösön, akik szerették volna, ha legalább egyik gyerekük mellettük, itthon marad. Szerencsére feleségem határozottan mellettem állt, támogatta azt, hogy vállaljuk el a kihívást. Az első évek nagyon kemény munkával teltek, mert a középiskola és az egyetem között nagy a szakadék.

– ***Ön jelenleg docens. Mit kellett tennie ahhoz, hogy ezt a rangot megkapja?***

– Középiskolai matematika-fizika szakos tanári diplomám van. Az egyetemen az adjunktusi rangért doktori értekezést írtam, melynek címe: A fejlesztés útja az intuitív szintről a hipotetikus deduktív szintre. A ranglétrán ezután a docensi cím áll. Hogy ezt megszerezzem, Walsch hallei professzor vezetésével kandidátusi dolgozatot írtam német nyelven, mely később Németországban is megjelent. Itt feltétlenül szeretném megemlíteni, hogy a budapesti védésre – mely szintén német nyelven folyt – eljöttek a volt tanítványaim közül: Boldoczki tanárnő, Kelemen tanárnő, Kispálné dr. Lucza Ilona tanárnő. Jelenlétük nagy lelkierőt adott a vizsgához.

– ***Úgy tudom, Ön nemcsak oktató, hanem kutató is. Milyen irányban folytat kutatásokat?***

– Lényegében két irányban. A matematikadidaktika – régebbi nevén: a matematikatanítás módszertana – nem igazán volt kidolgozva. A nemzetközi tendenciák magyarországi megismertetését viszont fontosnak tartottam, így a legfontosabb cikkeket lefordítottam magyarra és 1988-ban megjelent egy válogatásom Matematikadidaktikai tanulmányok címmel. Sok-sok nemzetközi konferencián való részvétel, híres professzorokkal való konzultáció alapján kialakult egy elképzelésem, amit a Bevezetés a matematikadidaktikába c. könyvben foglaltam össze. A könyv az egyetemi és főiskolai matematika szakos tanárképzésben alapkönyvnek számít.

Összegezve a fentieket: Munkám egyik alapvető területe a matematikadidaktika. Örömmel mondhatom, hogy én vagyok a első magyarországi matematikadidaktikai doktori (PhD) iskola (Debreceni Egyetem) egyik alapító tagja, téma és kurzusvezetője, dolgozatok bírálója. A magyar matematikai tehetséggondozás világhírű és ez ránehezedik az iskolai matematikaoktatásra. A problémát az jelenti, hogy a tehetséges tanulók által elsajátítható anyag a mérce, így a tehetségesekért föláldozzuk a többséget. Én ezzel a többséggel szeretnék foglalkozni. Hisz természetesen fontos a tehetséggondozás, de a maradék 90% más megközelítést kíván. Másként tanulják a matematikát, más problémáik, nehézségeik vannak. Sokszor hallom vissza tőlük: „Tanár Úr! Az utcán már többször repült felém madár, ezért értelmét látom a biológia tanulásának. De még sohasem jött velem szemben a $\sqrt{2}$. Akkor meg miért kell nekünk ilyeneket tanulnunk?" Fontos alapelvem még, hogy forduljunk jobban a tanulók felé. Laurinda Brown bristoli matematika-didaktikus mondta a magyar matematikaoktatásról egy látogatása végén: „You in Hungary are teaching mathematics, we in England children". (Ti Magyarországon matematikát tanítotok, mi Angliában gyerekeket.) Arra hívta fel ezzel a mondatával a figyelmünket, hogy ne csak a matematika absztrakt, formális rendszere legyen a vezérelv a tanításban, hanem a problémamegoldást kell a középpontba állítani, és ami még fontosabb, hogy engedjük előtérbe a tanulók egyéni elképzeléseit, ötleteit, javaslatait. A matematika csak eszköz a személyiség fejlesztésében, a képességfejlesztésben. Az egyetemi oktatómunkámban a fentiek szellemében dolgozom. Egyre több hallgató akceptálja ezen elveket, kurzusaimon sokan vesznek részt, sokan szeretnék diplomamunkájukat is nálam írni. A vetés tehát lassan beérik, érdemes volt küzdeni.

– ***Ahhoz, hogy valaki ilyen szép sikereket elérjen, szükség van a boldog, kiegyensúlyozott családi életre. Meséljen kérem azokról, akik a legfontosabbak az Ön számára!***

– Feleségem, Dulai Erzsébet kiskőrösi származású, a gimnáziumot is itt végezte el. Jelenleg iskolai könyvtáros, valamint a VIII. kerület könyvtárainak szaktanácsadója. Attila a budapesti Közgazdaságtudományi Egyetemet végezte el. Idén – 2002-ben – fejezi be

a közgazdaság doktori (PhD) tanulmányait az amerikai princetoni egyetemen. Tamás az ELTE földrajz-geográfus szakon szerzett diplomát. Jelenleg a Közgazdaságtudományi Egyetem végzős hallgatója a nemzetközi kapcsolatok szak doktori képzésében.

– ***Ha visszaforgathatná az időt, másképp csinálna-e valamit?***

– Nem. S bár a református vallásúak beszélnek eleve elrendeltetésről, én evangélikusként is úgy érzem, hogy az égiek irányították pályaválasztásomat, amit ma sem bántam meg. Nekem ezen a pályán a helyem, ebben tudtam és remélem, hogy még sokáig tudok alkotni, másoknak segíteni.

– ***S mi sem bizonyítja ezt jobban, minthogy ez a név – Ambrus András – ma már fogalom Kiskőrösön.***

– Ha van valamiféle mítosz a kiskőrösi működésemmel kapcsolatban – ami egyre szebbnek tűnik, mint a valóság volt – az valószínűleg a tanítványok hálájából adódik. Fontos embereknek tartottam őket, éreztettem velük, hogy nekem is fontos az, hogy eredményesek legyenek. Tiszteltem őket emberi mivoltukban, szerettem őket, jó volt együtt lenni velük az órákon és az órán kívül is. A matematika csak egy eszköz volt a formálásukra, nevelésükre.

Ambrus András gyakran látni családjával Kiskőrösön. Úgy gondolom, hogy nagyon is igaz rá az a régi mondás, mely szerint: *ha egyszer feljutnál valamelyik hegy csúcsára, ne felejtsd el, hogy az emberek a völgyben élnek.*

Kiegészítés az életúthoz 2010-2017

A pályázat évszámához egy szomorú esemény is tartozik. Hosszan tartó, súlyos betegség után meghalt a feleségem. Keserves, nehéz időszak következett a gyász, az egyedüllét valósága. Kapaszkodót jelentettek fiaim és a töretlen bizalom Istenben. Sajnos unokáim eléggé késtek, az első csak 2008-ben született meg, utána beindult az üzem, öt fiú unokám van, akik nagyon fontosak életemben, sajnos a három amerikai unokával ritkán találkozom. Sokat jelentett, hogy ebben az időszakban lettem tanszékvezető az ELTE Természettudományi Karán, ez a feladat lekötött. Lelkileg sokat jelentett,

hogy ebben az időszakban a Bács-Kiskuni Evangélikus egyházmegye felügyelője voltam, a sok egyházi rendezvény lelkileg járult hozzá az erősödéshez. Szakmai téren bár jártam nemzetközi konferenciákra, az igazi alkotó ihlet hiányzott, kevés cikkem jelent meg. Istennek hála 4 év óta van egy párom a kiskőrösi származású Farkas Anikó, aki nagy szeretettel, türelemmel, megértéssel gondoskodik rólam. Neki köszönhetően újra érdekel a szakma, nemzetközi kiadványokban hat tanulmányom jelent meg az elmúlt négy évben, évente legalább három nemzetközi konferencián veszek részt, tartok előadást. A Debreceni Egyetem Természettudományi Doktori Iskolája Matematika-didaktikai Alprogramjában öt doktorandusznak vagyok témavezetője, bízom benne, hogy sikeres védéshez segíthetem őket. Nagy örömmel járok péntekenként Kiskőrösre tanítani, örömet okoz, hogy segíthetek a felsőoktatásba készülő tanulóknak és van két tehetséges 10. osztályos tanulóm, akikkel már több mint hat éve foglalkozom.

SOLI DEO GLÓRIA!
EGYEDÜL ISTENÉ A DICSŐSÉG!

Ambrus Andrásnak, kedves tanáromnak

Kedves Bandi, köszönöm, hogy eszedbe jutottam a 75. születésnapodhoz közeledve.

1972 őszén kerültem Dunapatajról a kiskőrösi Petőfi Sándor Gimnáziumba. Eredetileg nem ide készültem, jó tanulóként divatos fővárosi külkereskedelmi szakközépiskolába nyertem felvételt, de kollégiumi elhelyezést nem biztosítottak, ezért szüleim nem engedtek budapesti albérletbe.

Nyár végén jobb híján Kiskőrösön kezdtem a középiskolát. Itt több fontos, sorsdöntő találkozásnak is részese lettem. Az egyik te voltál. Addig is kedveltem a matematikát, de a te óráid ennek egy új dimenzióját nyitották meg. Minden óra élmény volt, a biztos, magas szintű tudás mellett igazi emberséget, figyelmet, magabiztosságot, humort is kaptunk tőled. A gyengébb tanulók is szerették az óráidat, a teljes embert értékelted mindig, nem csak a házi feladatot vagy dolgozatot. Olyannyira nem tudtam elképzelni az életemet matematika nélkül, hogy jelentkeztem és felvételt nyertem a szombathelyi tanárképző főiskola könyvtár-matematika szakára. A könyvtár sem véletlen – feleséged, Erzsi karizmatikus hatásának köszönhetem ezt az érdeklődést. Mindkét szakot eredményesen elvégeztem, a matematika néha kihívások elé állított, de megküzdöttem vele. A kötelező tanítási gyakorlatokat is szerettem, de nyilvánvalóvá vált, soha nem leszek olyan jó tanár, mint te, máshogy pedig nem nagyon érdemes. A diploma megszerzése után könyvtárosként helyezkedtem el, egy ideig még matematika korrepetálással próbáltam a tudásomat szinten tartani, majd megtaláltam azt a hivatást, ami elérhetetlen vágyként mindig bennem volt. Néprajzosként múzeumban dolgozom több, mint három évtizede.

A matematika megmaradt örök szerelemnek, örültem, amikor a gyerekeim szerették és szomorkodtam, amikor nem. Köszönöm, hogy általad megtapasztalhattam a matematika logikusságát, szép-

ségét, egy-egy feladat megoldásának örömét. Hiszem, hogy életemre, gondolkodásomra hatással (jó hatással) volt az a négy év, amikor kiemelkedő pedagógusként tanítottál a gimnáziumban. Köszönöm.

A gimnáziumi éveim alatt másik sorsdöntő találkozásban is volt részem, találkoztam azzal a férfival, aki ma már közel négy évtizede a férjem. Meglepetés volt számomra, hogy rokoni kapcsolatban álltok. Úgy adom át neki a klaviatúrát, hogy szeretettel emlékezem a veled töltött évekre, és minden elképzelhető jót kívánok a születésnapodon. Egykori tanítványod:

Dávid Mária

Kedves Bandi bátyám!

Valójában bennem is Kiskőrösön telt meg tartalommal a közöttünk lévő rokoni és emberi kapcsolat. Tudtam rólad, de a több mint 10 évnyi korkülönbség bizony nem kevés. Különösen, hogy Te már régen tekintélyes gimnáziumi tanár voltál, amikor én még azt sem tudtam, hogy mit is akarok az életemtől valójában. Csak annyit tudtam teljes bizonyossággal, hogy nem vágyom a körülöttem élő kortársaim életére, mások az ambícióim, többet szeretnék. Ellenére annak, hogy a tanyavilág, ahol mindketten felnőttünk, rengeteget adott tapasztalatban, összetartásban, emberi minőségben, követésre érdemes példákban. A Kiskőrösről ide kiköltöző gazdák, ha nem is voltak módos emberek, tele voltak törekvéssel, munkaszeretettel, és feltétlenül többet szerettek volna nyújtani a gyermekeiknek, mint amit ők elértek. Vallásukat tartó és mélyen megélő evangélikusként, komoly áldozatot vállalva evangélikus lévitatanítót fogadtak a 30-as évek közepén, hogy csemetéik értő és alapos valláserkölcsi nevelést is kapjanak az iskolai tananyag mellé. Mindkettőnknek szerencséje volt még ehhez a tanítóhoz járni, és úgy hiszem, nem tévedek nagyot, ha azt valószínűsítem, hogy Kamondi Kálmán tanító úrnak elvitathatatlan szerepe volt mindkettőnk életének alakulásában. Abban pedig, hogy végül belőlem is pedagógus lett, ráadásul olyan pedagógus, aki újabb pedagógus generációkat nevel, a Te példádnak volt meghatározó szerepe. Nagyon kedvemre volt az is, hogy feleségeddel, Erzsivel együtt ott bábáskodtatok a mi bimbózó kapcsolatunk felett. Szívesen emlékszem arra, amikor érdemesnek találtál arra, hogy cikket írj rólam egy pedagógiai szaklapban. Imponált nekem, hogy egyetemi oktató lettél, s talán nem véletlen, hogy nagyon is tudatosan választottam én is a középiskola helyett a felsőoktatást. Sokat tanultam tőled arról is, hogyan kell bánni a ránk bízott lelkekkel. Noha soha nem tanítottál, remélem, nem voltam rossz tanítványod. Mert életed példájával, szakmai krédóddal valójában nem csak a nagybátyámnak, de mindig is egyik meghatározó mesteremnek tartottalak. Isten éltessen a születésnapodon!

Unokaöcséd: Kriskó János

Az élet, a tanár, és a matematika

Boldoczki Sándorné Domokos Margit Tünde, Kiskőrös nyugalmazott matematika-fizika szakos középiskolai tanár

Megismerkedés

Ambrus András tanár úrral 1968. szeptemberében, gimnáziumi tanulmányaim második – ma 10. – osztályában találkoztam. Visszatért Kiskőrösre, középiskolai évei helyszínére dolgozni, és átvette a Kecskemétre távozó kollégától a munkát.
Osztályfőnököm és matematika tanárom lett 3 évig egy 42 fős osztályban. A nappali oktatás mellett levelező tagozaton is tanított, férjem is tőle tanulta, és a kezdeti nehézségek után általa megszerette a matematikát. A tanár úr lendülete, lelkesedése, következetessége, igazságossága mindenkit megérintett. Néhány mondat az akkori osztálytársak megfogalmazásában:

„András tanítási módszere új volt iskolánkban. Szigorú követelmények helyett bevont mindenkit a munkába az érdeklődés felébresztése által. Kíváncsiak lettünk a feladatok megoldására, és nem muszájból számoltunk."
„Konkrét történettel nem tudok szolgálni, de azt hiszem, hogy a Sárkány (az előző tanár, akit azért sokan szerettünk, s aki nem a munkája, nem a stílusa, hanem a neve szerint volt Sárkány) korszak után sokaknak jelentett megkönnyebbülést András tanítási módszere."
"Eltűnt a matematika „mítosza", az egyszerűség és az érthetőség került előtérbe.„
„Úgy emlékszem, hogy többen is meglepődtek azon, hogy megértettek olyan dolgokat is, amire előtte nem is számítottak."
„A matematikát nem, de őt, az osztályfőnökünket, mint embert nagyon tiszteltem és szerettem."

„Két dolog jut eszembe. Egyrészt a matek órák oktatási stílusa, ami sokat adott nekem, de az egész osztálynak is. Másrészt a tanulókhoz való hozzáállása, amit az egyetemi pályafutásom alatt hasznosítottam."

Az én pályaválasztásom az ő javaslata alapján történt. Édesanyám elvárása szerint minden tantárgyat érdeklődéssel és szorgalommal tanultam, de a matematikát szerettem a legjobban, mert a tanári magyarázat után könnyen és gyorsan elsajátítottam. És ebben a tantárgyban nem lehet érzelmek alapján ítélkezni – „…az igen igen, a nem nem…" (Máté 5,37). Édesanyám álmaival (orvosi hivatás) ellentétben én úgy fogalmaztam osztályfőnökömnek, hogy mindegy hol tanulok, csak matematikával foglalkozhassam. Erre mondta ő, akkor legyél matematikatanár. Most úgy tekint rám, mint az egyik első olyan tanítvány, aki folytatja az ő szakmáját. Így kerültem Szegedre a JATE-ra és a matematikához legközelebb álló fizika tantárgy lett a párja.
„Döntésemet nem bántam meg. A tananyag állandósága mellett az órarend változatossága, a tanulók és céljaik különbözősége segített, hogy ne legyen monoton a munka. Fogalmazhatok úgy is, hogy kreatív lehettem, s talán a legfontosabb, hogy mindig fiatalok között éltem."
„Most is azt vallom, hogy olyan munkát kell választani, amit akkor is végezne az ember, ha nem fizetnének érte. Nekem a matematika mindig izgalmas. Olykor játék, olykor rejtvény, tehát szórakozás, de persze feladat is volt és maradt a mai napig."
„A középiskolás évek mintája végig kísérte tanári pályámat, mindezt köszönöm Ambrus tanár úrnak. Hogy mi a legfontosabb az életben, gróf Széchenyi István fogalmazta meg legszebben, Ambrus tanár úr példája is ezt közvetítette számomra:

Azokért élünk, akiket szeretünk,
azokért, akik igaznak tartanak,
a jövőnek élünk, a szépért, s jóért,
amit tehetünk."

Néhány szó a matematikáról

Miért kell matematikát tanulni? – kérdezik sokszor diákok, szülők. Ez persze ott merül fel, ahol szenvedések, és/vagy kemény munkavégzések (is) szükségesek az elsajátításához. Ha a kérdésre egy szóval kívánunk válaszolni, akkor azt mondom, okosít. Ha bővebben, akkor úgy fogalmazok, hogy ennek segítségével lehet az agyat a legintenzívebben tornáztatni. Ha még részletesebben indokolok, akkor kitérek arra, hogy az ember a test, a lélek és a szellem hármas egységéből áll, amelyek egymásra nagyon hatnak, ezért egyensúlyban kell legyenek. Ezeket gondozni, gazdagítani szükséges. Nem azonos időtartam kell az építésükre, de fontos törekedni, hogy egyik se maradjon el. A szellem edzésének, gyarapításának, frissítésének, fejlesztésének egyik, szerintem a legjobb eszköze a matematika. Ezt az is megérti, akinek nem kedvence ez a tantárgy.
„Azt is tapasztaltam munkám során, hogy az emberekben az a felfogás él, hogy „a matematikát nem tanulni, hanem érteni kell". Ezzel én nem értek egyet. Thomas Alva Edison is úgy fogalmazott, hogy „ A zseni egy százalék ihlet, kilencvenkilenc százalék verejték". Én is azt láttam, hogy egy osztályban az okos, de lusta tanuló nem feltétlenül lesz osztályelső még matematikából sem. Én úgy fogalmaztam, hogy a tanulás gyorsabb és könnyebb, ha érti a diák, de például a kidolgozott feladatok ötletét a memóriában gyüjteni kell. Galileo Galileit is idézem, aki szerint „Senkit sem lehet megtanítani valamire, csak hozzásegíteni ahhoz, hogy önmaga érdekében elsajátítson valamit".
„A 35 éves tanári munkám során megismert és általam legokosabbnak vélt tanulónál nem tudtam elérni, hogy versenyre jelentkezzen matematikából, pedig szép eredményt hozhatott volna iskolájának. Érettségi után matematikus szakra jelentkezett egyetemre és mellette a jogot is végezte. Később a közgazdaságtudomány tanulását is elkezdte. Végzettségeiről nincs információm, de azt hallottam, hogy felszolgálóként (is) dolgozik."
„Ez az eset azt mutatja, hogy akarat, szorgalom és kitartás helyett/nélkül az okosság még nem elegendő."
„Nagyon fontos a tanár szerepe, de van, amikor nem elegendő. A

diák tesz legtöbbet önmaga érdekében, a szülő segít, a tanár irányt mutat.
Érdeklődés felkeltése a matematika iránt, rendszeres gyakorlás, a házi feladatok áttekintése, annak számonkérése amit megtanítottunk, kiegészítve esetleg meglepetés-feladattal. Aztán nagyon fontos a gyors visszajelzés. A dolgozat eredményére a következő órán még nagyon kíváncsi a tanuló, a kérdésekre és az általa leírtakra is jól emlékszik, de ezek az idő múlásával egyre halványodnak."
„A dolgozatok osztályzatai a tanári munka visszajelzői is, a tanár saját magát is méri egy-egy alkalommal, ezért is voltam mindig kíváncsi az eredményre, és ezért javítottam ki gyorsan, legtöbbször a következő órára minden írásbeli munkát."
„Emellett szükséges a sikerélményhez juttatás, sőt dicséret is kell, amely független a tanuló képességétől. A jól végzett munka örömére mindenki éhezik."
„A munkám során kevés lehetőségem volt kiemelkedő érdeklődésű, képességű tanulókkal foglalkozni. Pedig ők a tanár számára is motivációt jelentenek, és tanulmányaik vége felé már egy-egy feladat során új megoldással is előállnak. Nyugodtan állíthatom, hogy ekkor a tanár is tanulhat."
„Viszont a kevésbé tehetséges tanulókkal megszerettetni, és nekik megtanítani a matematikát, majd az érettségit sikerrel zárni, olykor igen nagy kihívás. Ehhez gyakorlat, bölcsesség, elfogadás és tisztelet is szükséges."

A tanítás szép emlékei

Örömmel emlékezem, hogy diákom volt, együtt dolgozhattam 1986-88-ig a gimnáziumban Prof. Dr. Aszódi Attila egyetemi tanárral, a paksi kapacitás fenntartásáért felelős kormánybiztossal, aki már akkor céltudatosan, nagy törekvéssel vette az akadályokat, tanári útmutatásokat.

Egy másik kedvenc tanítványom Szabó Judit, aki 2003-ban Nikosz Kazantzakisz szavaival köszönte meg munkámat. „A tanár híddá feszül, s biztatja tanítványait, keljenek át rajta; majd miután

megkönnyítette számukra az átjutást, boldogan összeroskad, arra buzdítva őket, hogy maguk is építsenek hidakat."

2009-ben verset írt, abban összegezte gondolatait Riskó Áron, aki magyar nyelv és irodalom tantárgyat tanult magas óraszámban, így nem a matematika volt a legkedvesebb számára.

Íme a vers:

Egy igazi a sok közül

Pereg a létünk, mint az üvegen az esőcsepp,
Szeretet nélkül minden üresen megy előre.
Emberek jönnek-mennek, ahogy az üres szavak,
Fut a világ, villognak fények, az idő halad.

Zúg, zakatol a zajos város, az izgága nép,
Mindenki csak fut, rohan, de senki nem tudja, mért.
Senki sem tudja, merre és meddig visz az útja,
Honnan jött és hová megy: senki, senki sem tudja.

Mint tengerben a halraj, nyüzsög temérdek ember,
Egymást taposssák el, s világuk megtelik szennyel.
Az utcákon milliók mennek egymás mellett el,
A város hatalmas, de otthonra senki nem lel.

Mért lett rideg a világ, mért lett a Föld egy börtön?
Miért lett már a szeretetnél is több az ösztön?
Mért gondolja mindenki, hogy csak ő maga fontos?
Van-e még, ki önmaga tud másért lenni hasznos?

Van-e, ki bátran ki mer állni a gyengébbekért,
Aki felelősséggel együtt vesz fel tekintélyt?
Van-e még, aki szembe mer menni a tömeggel,
Olyan, ki képes lenni emberek között ember…?

Kevés az ilyen és mindig csak egyre kevesebb,
Ritka, mint a drágakő, de annál értékesebb!
Különleges és nagy kincs, össze nem téveszthető,
Nem hasonlít semmihez, pénzen nem megvehető.

Hálás vagyok, hogy volt példa, Ki maga is ember,
Mert embernek lenni nem könnyű: azt tanulni kell.
Hálás vagyok, hogy van, Akire fel tudok nézni,
Mert tanított gondolkodni, s tanított figyelni.

Köszönöm azt, hogy válaszolt, amikor kérdeztem,
Köszönöm, hogy segített, amikor megrekedtem.
Köszönöm, hogy a sikereimben velem örült,
Köszönöm, hogy amikor problémám volt, mellém ült.

Köszönöm azt, hogy szerette, ha a diák örül,
Köszönöm azt, hogy egy igazi volt a sok közül!
Köszönöm, hogy tanított szeretni és törődni,
Mindazt, amit értem tett, meg sem tudom köszönni…

2014-ben Mucsi Annamária Lev Tolsztoj szavaival köszönt el: „Ha egyszer a pedagógus szereti a munkáját, akkor jó pedagógus lesz. Ha szereti tanulóit úgy, mint apja és anyja, akkor jobb pedagógus lesz annál, aki minden könyvet elolvasott, de nem szereti sem a munkáját, sem a tanítványait. Ha pedig egyesíti önmagában munkájának és tanítványainak szeretetét, akkor tökéletes pedagógus."

Ezek a mondatok Ambrus tanár úr tanítványa számára íródtak, de a hála és az elismerés Ambrus tanár úrnak is szól, mert ő adott mintát és irányt. A versben is benne van: „Mert embernek lenni nem könnyű: azt tanulni kell." Ambrus tanár úrtól ezt is meg lehetett tanulni, nem csak a matematikát. Azt is megmutatta, hogy mindenki tudja teljesíteni az elvárásokat, ha mindketten, azaz tanuló és tanár törekednek, akarják, és nem irreálisak a célok.

Szöveges feladatok megoldásának tapasztalatai

A matematika tantárgy iránti érzelmek kialakulásában nagy szerepe van a szülőknek, és természetesen a pedagógusoknak.
A gyermek belép az óvodába, már akkor vannak játékok, foglalkozások, melyek a képességek fejlesztésére feladatok elvégzését kívánják tőle egyéni vagy csoportos formában.
Az iskolában már számtan órának és igen hamar matematikának nevezzük ezeket az órákat.
Amikor megtanulnak olvasni, akkor nemcsak tanári utasítással, hanem írott szöveg formájában is lesznek feladatok. Aki bizonytalanul vagy pontatlanul olvas, talál okot arra, hogy ne örömmel végezze ezt az iskolai vagy az otthoni munkát. És egy idő múlva rögzül benne, hogy nem szereti a szöveges feladatokat.
Tapasztalatom szerint ezek a tanulók azért boldogulnak nehezebben a matematikával, mert a hallott vagy a leírt szövegből mást emelnek ki, másra figyelnek fel. Úgy fogalmaznék, hogy a kérdés megválaszolásához a lényeges dolgokat a lényegtelentől nem, vagy nehezen tudják szétválasztani. Az ő gondolkodásuk más beállítású, így ha visszamondják a feladatot, nem csak a szükséges szavakat, adatokat kiszűrve beszélnek vagy jegyzetelnek. Ezért félnek is a szövegtől, akár algebra, akár geometria témánál vagyunk.
Az olvasás tempóját is lassítani kell, olykor megállítani, ismét elolvastatni, és nem engedni, hogy átszaladjon egyszerre az egész szövegen.
Természetesen abban, hogy az írott szövegből mit kell kiolvasni és megjegyezni magyar vagy történelem órán, illetve mit kell kijegyzetelni a matematika számára, az nem azonos. Ehhez bizonyos képesség szükséges, de gyakorlással és tanulással ez fejleszthető.
A tanulásra nagy hangsúlyt fektetnék.
A típusokat, a hozzájuk tartozó írási formát – táblázatot –, összefüggéseket memorizálni kell. Ebből, az úgynevezett elméletből is lehetne, kellene számonkérés. Ennek kettős értelme is van: jelzi a fontosságot, illetve aki szorgalmas, azt sikerhez lehet juttatni.
A szövegértés és a gondolkodás hiánya mellett sajnos a fejben való

számolási készségek is romlanak. Már nem is törekednek arra, hogy lehagyják a tanárt a fejben való számoláskor. Sőt a számológépbe sokan az előjelekkel együtt írják az adatokat, holott azt mindenképpen előre kellene meghatározni, és azok nélkül hamarabb kaphatnának végeredményt.

Az otthoni, délutáni munkát sem nevezném sok esetben tanulásnak. Az órán a táblára felírtakat lemásolják, közben figyelnek vagy nem; a hallottakat, azaz a magyarázatot már nem írják le – kivéve, ha a tanár diktál, vagy ha erre külön felhívja a figyelmet. A házi feladat megoldása előtt otthon aztán ezt sokan nem nézik át, majd csodálkoznak, hogy a leckével kudarc éri őket. Úgy fogalmaznak, hogy nem értik a tananyagot, holott arról van szó, hogy nem tanulták meg azt előbb.

Az órán a feladatok szövege természetesen elhangzik a tanár részéről, de sokszor nem diktálja le. A táblára nem írja fel, tehát a tanulók füzetébe sem kerül. Így otthon a diák lát egy megoldást –, ha egyáltalán átnézi az iskolában történteket –, de hogy azt mire készítették, az talány marad. Így nincs mit megtanulni. Ha tankönyvből vagy feladatgyűjteményből dolgoznak, akkor természetesen a példák számozásának leírása megtörténik, akkor otthon megtalálható a szöveg is annak, aki szeretné. Úgy gondolom, hogy a megoldásokat a hozzájuk tartozó feladatszöveggel együtt kellene megjegyezni.

A szülők sem tanítják meg gyermekeiket tanulni, már nem divat a kikérdezés sem. Viszont sok délutáni elfoglaltság van beütemezve – sport, zene, nyelvóra…., amelyek persze fontosak –, így az is igaz, hogy elegendő idő sincs a tanulásra. Ekkor javasoltam a fontossági sorrend kialakítását, s amire nem vagy kevés idő marad, azt el kell hagyni.

A házi feladattal való foglalkozásra ösztönzőleg hatott az, amikor kérésemre és jutalmazásra egy-egy tanuló a szünetben felírta a táblára a megoldásokat a levezetéssel együtt. Az óra kezdetén én ránéztem, s amit kellett javítottam vagy megbeszéltük. Mindenki értette ezután, én pedig időt nyertem a további tananyaghoz. Aztán persze 2-3 heti házi feladat megbeszélés után abból, de más számokkal vagy más megfogalmazással számonkérés történt. Ekkor valóban törekedtek a megértésre és a memorizálásra.

Sok múlik a feladat helyes megfogalmazásán. Nem szabad szükségtelen információkkal szaporítani a mondatokat, keverni a szavakat. Nehezíteni lehet a mértékegységekkel és egyéb összefüggésekkel, ami persze megtanulható, ha a tanár arra ösztönöz.
Néhány szöveg, mely nem nyerte el a tetszésemet:
9. évfolyamosoknak szánt gyakorló feladat: „Egy anya 29 éves volt, amikor a fia született. 11 év múlva az életkora 1 évvel lesz kevesebb, mint a fia akkori életkorának kétszerese. Hány évesek most?"
Én a kérdést középre tettem volna: Hány évesek most, ha 11 év múlva az anya 1 évvel lesz kevesebb, mint… Időrend szerint: múlt, jelen, jövő.
Szintén 9. évfolyamos szint a következő: „Az iskolai csúcsot 2000 méteres futásban Hosszúláb tartja 6 perc 15 másodperccel. Fürgeláb szintén jó futó, ő 8 perc alatt teljesíti ugyanezt a távot. Mekkora előnyt adjon Hosszúláb Fürgelábnak a 2000 méteres távon, hogy egyszerre érkezzenek a célba, ha feltételezzük, hogy egyenletesen futnak?"
Az „előny" szó nem ugyanazt a gondolatot váltotta ki bennem és a tanulóban. Ő az időbeli előnyre, én természetesen a szövegbeli utalás alapján a távolságbelire értettem. Viszont így lehet egy feladatból kettőt is kapni. Persze aki sportban ügyes, az megérti a szót, és jól válaszol a kérdésre, de a sport és a matematika nincs szoros összefüggésben.
10. évfolyamosoknak írt feladat: „Zoárd a bulin felírta egy szép lány telefonszámát egy cédulára, de sajnos az utolsó számjegy elmosódott. A kiolvasható szám 249196? Szomorúan mesélte a dolgot barátjának, aki úgy emlékszik, hogy az utolsó jegy 0 volt. Zoárd tudta, hogy a szám osztható volt 9-cel. Igaza lehetett-e barátjának? Milyen számot kell hívnia Zoárdnak, ha beszélni szeretne a lánnyal? Választ indokoljuk!"
Azt gondolom, ilyen szöveg nem segít ahhoz, hogy valaki megszeresse a tárgyat.
Szintén 10. évfolyamosoknak szólt: „A kör egy rögzített körívéhez tartozó középponti szög 70 fokkal nagyobb, mint a rajta nyugvó kerületi szög. Számítsuk ki a köríven nyugvó középponti és kerületi szögek nagyságát!"
Stilisztikai vagy egyéb dolog miatt használja a szöveg a „rajta nyug-

vő" kifejezést, nem tudom. Így a tankönyvben sehol nem szerepel. Ez is megzavarhatja a diákot.
Érdekes volt a következő is, bár ezt emelt szintű érettségi gyakorló feladatsorban találtam: „Egy motorcsónak a folyón a vízfolyás irányában haladva az AB utat 5 óra alatt, a BA utat a vízfolyással szemben haladva 5 óra 40 perc alatt teszi meg. Mennyi idő alatt teszi meg az AB utat egy tutaj, amely a víz sebességével halad, ha a folyó és a hajó sebessége állandó?"

Itt szó van csónakról, tutajról, hajóról, és a folyóról. Gondolom, mindenki számára közismert, hogy mely járműnek nincs, és melynek van saját, és mihez – parthoz, vízhez - viszonyított sebessége, ezért azt nem kell megjegyezni a szövegben.

Eszembe jutottak a kártyás feladatok is. Megdöbbentem, amikor tanításom során tapasztaltam, hogy a magyar kártyát nem ismeri mindenki. Szerencsére a hagyományos dobókockával még nincs baj!

Azt kihangsúlyoztam, hogy ha a tanuló úgy látja, hogy a megfogalmazás több módon értelmezhető, és nem egyforma megoldás tartozik az egyes „szövegekhez", akkor az összes megoldást írja le, bízva abban, hogy a szükséges is szerepelni fog.

Ne hagyjuk el a feladatok ellenőrzését! Bár mindig időhiányban szenvedünk, mégsem elég ha csak mondjuk, hogy az ellenőrzés szükséges, azt órán, közösen tegyük is meg. A házi feladatoknál és a dolgozatban is várjuk el a tanulótól. Ezzel a számolási készség is javítható, ugyanakkor ez a munka üzenet, hogy a pontosságra kell mindig törekedni.

Mindezek ellenére vagy mindezekkel együtt úgy gondolom, hogy a szöveggel és adatokkal megfogalmazott feladatokra nagy szükség van, az a fontos, hogy szánjunk elég időt a gyakorlásra, a közös munkára.

„Kívülálló" véleménye

Egykori tanítványom, Slajkó Éva minden tantárgyból szorgalmas és sikeres volt. Egyetemi tanulmányai során viszont nem a matematikát választotta, jelenleg középiskolai magyar- és némettanár. Emlékeit felidézve a következőket fogalmazta:

„A matematika igencsak sokat emlegetett tantárgy, igaz, különböző előjelekkel. A többségnek rögtön az érthetetlen számolás, a rettegett táblai feladatok ugranak be, egyszóval a „mumus-tantárgy". Azonban hála Istennek ott van a másik maroknyi, ám lelkes csapat is, akik élnek-halnak e tantárgyért. Szeretik a fejtörőket, a matematika letisztult logikusságát, a kétszer kettő józanságát.
Egy biztos, a számok világának ismerete nélkül olyan lenne kilépni a nagybetűs életbe, mint KRESZ-vizsga nélkül autót vezetni forgalomban. Bármennyire is nem gondolnánk amikor a fránya képletekkel bajlódunk, hogy a boltban, a bankban vagy a piacon gyors fejszámolással (esetleg számológép segítségével ☺) már a mindennapokban fogjuk használni ezeket a képleteket, előbb-utóbb mégis így fog történni. Addigra remélhetőleg kevésbé lesz rémes.
De miért ilyen nehéz? Talán mert sokan sokféle észjárással próbáljuk megérteni ugyanazt a dolgot. Számomra az igazán kiváló matematikatanár képes több oldalról megközelítve elmagyarázni egy-egy szabályszerűséget, minden sikeres próbálkozást dicsérettel jutalmaz, és mindenekelőtt meghagyja a teret és a lehetőséget a hibázásra. Hisz ez is az élet része.
A legfőbb mégis az, hogy ő maga legyen elhivatott a tantárgya iránt. Hiszen a gyermek a pedagógusa lelkesedését érezve kaphat kedvet e számokkal teli világ rejtelmeinek felfedezéséhez."

Befejezésül

Egy barátom, Dr. Cserháti László Gábor önéletrajzában olvastam egy mondatot, mely az én hitvallásomat is kifejezi. Azért idézem, mert Ambrus tanár úr is ennek szellemében élt, dolgozott. Remélem és kívánom, hogy még sokáig így tegyen!

„Életem legfontosabb felismerése, hogy az élet igazi értéke a szolgálat, amivel a közösség rendelkezésére állhatok."

Boldoczki Sándorné Domokos Margit Tünde
egykori tanítványod

Alföldi Géza:

Csak a gyökér kitartson

Kint a szőlőnkben, emlékszem rája,
Deszka kunyhónk előtt állott Öregapám diófája.
Ha vihar támadt, - szőlőkötözéskor, -
Dörgött az ég, csattant a villám,
Füstölt az úton a felpaskolt por,
Ahogy végigverte a dörgő esőostor,
Bebújtunk a kunyhóba. Onnan néztem,
Miként robognak a felhők az égen.

Nagyapám a fát leste.
Vajon elbír-e a széllel?
Recsegett, ropogott öreg teste,
A szél a gallyakat csomósan tépte,
Hullott a zöld dió áldott termése,
Mozgott a föld is, ahogy a vihar rázta,
De győzte a vihart öregapám konok,
Törzse kopott diófája.

Csak a gyökér kitartson!...
Még ma is hallom - motyogott nagyapám:
Nem lesz baj, gyerek!
Dió lehullhat,
Új tavasszal terem az ág újat,
Ág is nő a letépett helyére,
De ha a gyökér nem bírná tovább,
A diófának, kis unokám, vége.

Most is vihar, szél tépi, rázza
De állja a vihart Árpád vezér
Ezeréves, öreg diófája.
Kárpátoktól az Adriáig nyúlnak a gyökerek
Tapadnak a földre, hogy termés legyen
Az örök magyar szőlőhegyen,
Hogy élni tudjon: dió, levél, ágak ...
- Adj! Uram, elég erőt a harcos diófának!

Lehull ezer dió, millió lesz holnap,
Letörhet száz ág, ezer nő helyére
S ha csupán a csonka törzs marad,
Ha új tavasz zsendül, kifakad!
Uram, csak Te lássad,
Hogy ezen a véres, küzdelmes harcon
A gyökér kitartson.
A gyökér kitartson!

Kelemen Ildikó, középiskolai matematika-fizika szakos tanár, igazgatóhelyettes Kiskőrös

Kedves Bandi!

Három apróság ugrándozik itt körülöttem – pedagógus nagyszülőkkel nyáron ez gyakran megesik –, s nagyonizgatottak, vajon a mai nap milyen meglepetést tartogat számukra. Tengernyi kérdésükre válaszolgatok, közben azon tűnődöm, elégedett ember vagyok-e.

Igen, azt hiszem, elégedett lehetek a sorsommal: nagyon szép pillanatokat éltem meg családom, barátaim körében, és bízom benne, ez sokáig még így marad. Szerencsésnek mondhatom magam azért is, mert egész életemben azt a munkát végezhettem, amit szeretek, TANÍTOTTAM.

Hogyan kerültem a pályára? Magam sem vettem észre, teljesen magától értetődő volt akkor tizennyolc évesen, hogy tanár leszek. Így közel fél évszázad távlatából visszagondolva már tudom, ezt jórészt neked köszönhetem.

Mire a gimnáziumba kerültem, már tudtam, egyik kedvenc tantárgyam a matematika lesz, ezért különösen kíváncsi voltam, ki lesz ott a tanárom. Emlékszem, az első napon megszeppenve ültünk a teremben, s te berobbantál fiatalos lendülettel, egy kicsit beszéltél a matematika szépségéről, a tanulás fontosságáról, majd kérdeztél és csak kérdeztél. Sokan voltunk, nevünket sem bírtad megjegyezni, de mindent tudni akartál rólunk. Néhány napon belül magad köré gyűjtötted az érdeklődőket, és kezdődött a kemény munka. Lazításra esélyt sem adtál. A szorgalmi feladatok sorozata, az állandó szakköri foglalkozások, a házi versenyek mind-mind alkalmat adtak arra, hogy tudásunk bővítése mellett önbizalmunkat is erősítsd. Ehhez a mai napig nagyon értesz: elhitetni a tanítványaid-

dal, hogy képesek akár a lehetetlenre is, ettől szárnyakat kapnak, és tényleg megcsinálják – akár a lehetetlent is.

A mi időnkben még nem volt annyi verseny, mint most. Te tudtad, okosak vagyunk, jók vagyunk, de annyira nem, hogy országos szinten esélyünk legyen, ezért szerveztél nekünk valót. Felkerested a környező középiskolákat, győzködted őket, mérjük össze tudásunkat, mi megyünk, csak fogadjanak.Versenyek után hazafelé a vonaton hol szomorkodtunk, hol lelkesedtünk attól függően, hogyan teljesítettünk. Elmarasztaló szavakat sosem kaptunk, csak bátorítást. Ha romokban hevertünk, akkor jobban, ha sikereink voltak, akkor visszafogottan dicsértél bennünket. Mindenkit külön – külön.

Neked mindig az volt a fontos, ki mennyit fejlődött önmagához képest legyen szó jó vagy kevésbé jó tanulóról. Elvártad tőlünk, jobbaktól, hogy segítsük a gyengébbeket, tanulópárokban gondolkodtál, eleve így ültettél bennünket. Az én barátnőm sem volt egy matekzseni, sokat tanultunk együtt, délutánonként újra és újra elmagyaráztam neki a napi anyagot. Akkor nem is gondoltam, hogy ez hasznomra lesz egyszer. Megtapasztaltam egyrészt, hogy megtanulható minden – még a matematika is, csak idő kérdése, másrészt megtanultam megértetni az érthetetlent, s főként, hogy mindehhez végtelen türelem kell.

Sosem felejtem azt a riadalmat, amit katonai behívód okozott. Mi csak magunkat sajnáltuk, mi lesz velünk meg a vizsgáinkkal,szüleink már bátrabbak voltak, ők különböző fórumokon próbálkoztak, sőt még az aktuális minisztert is felkeresték, hogy ne kelljen bevonulnod érettségi előtt több hónapos szakszolgálatra. Mégis menned kellett. De nem feledkeztél meg rólunk. Mi, felvételizők rendszeresen kaptunk személyre szabott feladatsorokat a laktanyából, s megoldásainkat néhány napon belül kijavítva visszaküldted, a többieket pedig levélben bíztattad a tanulásra. A faluról, tanyáról jött osztálytársainkra különös figyelmet fordítottál, időt, energiát nem kímélve segítetted őket tanulmányaikban. Nem véletlen, hiszen te is egy Harta melléki tanyán nőttél fel, bizonyára emlékeidben őrzöd még, mennyi küzdelem árán sikerült kitörnöd ebből a zárt világból. Nem voltál osztályfőnökünk, de akár lehettél is

volna, annyit törődtél velünk. Most köszönöm meg neked és természetesen Évának, osztályfőnökünknek is, hogy tanítványaitok lehettünk, hogy egy nagyon klassz iskolába járhattunk, ahol Szent-Györgyi Albert gondolatai szerint tanítottatok, neveltetek, készítettetek az életre bennünket:

„Az iskola arra való, hogy az ember megtanuljon tanulni, hogy felébredjen tudásvágya, megismerje a jól végzett munka örömét, megízlelje az alkotás izgalmát, megtanulja szeretni, amit csinál, és megtalálja azt a munkát, amit szeretni fog…"

Te is azt gondolod, vagy csak én érzem úgy, hogy mi lettünk a bezzeg osztályod?A hetvenes évek derekán nem volt jellemző, hogy egy kisvárosi gimnáziumból tömegesen jelentkezzenek főiskolára, egyetemre, s mi mégis megtettük, és sikerült. Negyvenhárman jártunk az osztályba, ebből közel harmincan lettünk diplomásak. Került közülünk ki orvos, jogász, közgazdász, mérnök, pedagógus, és ami különösen kedves számodra: egy fizikus srác mellett az öt matematika tanár. Istenem, de jó lenne, ha a tanári pálya újra vonzóvá lenne!

Hát igen, féltem én is a szakma presztízsét. A fizika tanárok után lassan elfogynak, kihalnak a matematika tanárok is. Hol találjuk majd azokat a tanárembereket, akikről Szent-Györgyi Albert is írt, akik maradéktalanul megvalósítják az iskolával szemben állított elvárásokat, akik egyike Te is vagy?

Én igazán Ambrus tanítványnak mondhatom magam. Emlékszem, egyetemistaként, kezdő pedagógusként egy-egy probléma megoldásakor gyakran idéztem fel, nálunk hogy is működött ez – legyen szó akár matematikai, akár nevelési kérdésekről. A középiskolás tananyaggal sosem volt bajom, hála a sok versenynek, elemi matek órákon jól szerepeltem, Pufi bácsitól rendre kaptam a dicséreteket, társaimtól meg az elismerő pillantásokat. Szerencsés helyzetben voltam amiatt is, hogy didaktikai módszereidet nem könyveidből kellett tanulnom, hanem a valóságban leshettem el.

Tőled tanultam: egy matek tanár akkor teszi a legtöbbet, ha eléri, tanítványai gyomorgörcs nélkül ülnek be órára, és ott nem csak ülnek, hanem dolgoznak is – hosszú éveken keresztül ezt vallottam én is, amit többé-kevésbé meg is valósítottam. Az utóbbi időben

a gyomorgörcs ugyan elmarad, de sajnos vele együtt gyakran a tanulás is… Lehet, én romlottam el, bennem van a hiba? Vagy ennyit változott a világ?

Egy dolgot azonban sosem akartam átvenni szokásaid közül: biciklizés közben Népsportot olvasni. A biciklizést értem és imádom, a Népsportot is értem, de ritkán olvasom, és közben még azt is figyeljem, a lányok melyik fiúval sétálnak kézen fogva tanítás után? Hát ez nekem nem megy! Nem tudom, próbáltad-e mostanában? Akkor nagyon magas szinten művelted!

Az évek előre haladtával kapcsolatunk átalakult, lassan nem tanítványnak, sokkal inkább kollégának tekintettél. Az érettségi találkozók mellett gyakran vádorgyűléseken, különböző konferenciákon is összefutottunk. Bár kezdeti botladozásaimat megmosolyogtad, számíthattam rád, tanárrá válásomat, szakmai fejlődésemet az első pillanattól kezdve segíted. Rendszeresen ellátsz folyóiratokkal, tanulmányokkal – olykor véleményezésre a tiédet is belecsempészed, bevonsz, beajánlasz országos mérésekbe, kísérletekbe. Kíváncsian hallgatod tapasztalataimat, véleményemet, mert vallod, a gyengébbtől, a fiatalabbtól sem szégyen tanulni.

Egy alkalommal arról beszélgettünk, hiányzik valami az életedből, szívesen foglalkoznál középiskolás fiatalokkal. Emlékeim szerint a kevésbé szorgalmas, kicsit butácska osztálytársaimat is sikerült annyira motiválnod, hogy nem lett bukás sem év végén, sem az érettségin. De az igazi kihívást a tehetségek felkutatása jelenti számodra a mai napig. Szó szót követett, s máris kész volt az egyesség: én adom a tanulókat és a helyet, te pedig szabadidődet és a tudásodat. Hetenként levonatozni vidékre nem kis áldozat, de végre megengedheted magadnak azt, ami örömöt jelent számodra, amit igazán szeretsz. Péntek délutánonként a diákok lelkesen várnak, ki nem hagynának egyetlen alkalmat sem, és te boldogan jössz miattuk is, meg azért is, mert hazajössz.

Az elmúlt tíz évben sok – sok közös tanítványunk volt, van, s remélem, még lesz is. Néhányukat megkérdeztem, hogyan élték meg óráidat. Íme, válaszaik:

A Tanár Úr megmutatta, hogy a matematikát másképp is lehet nézni, hogy vannak igazán érdekes feladatok, problémák. A heti órák

nagyon fontosak voltak számomra, hálás vagyok, hogy részt vehettem rajtuk. (Zita)

Ambrus tanár úr megmutatta, hogy vannak olyan egyetemi tanárok, akihez bátran lehet fordulni segítségért. Figyelmes és nagy tudású tanár, aki motiválja és bíztatja diákjait. Nagyon sokat tanultam tőle. (Helén)

Ambrus tanár úr mindig segített, ha elakadtam. Tippeket, új meglátási módot nyújtott egy problémához annak megértése, megoldása érdekében. Gondolt tanítványai jövőjére is, ezáltal nagyban megsegítve az egyetemi évkezdést. Kis bepillantást nyújtott az egyetemi világba a tanítványaihoz való hozzáállásával, egyedi humorával. Igyekezett megmutatni a matematika szépségét (középiskolai szinten mérve persze) a bemutatott problémákkal, témakörökkel. (György)

Ambrus tanár úr órái mindig jó hangulatban teltek, öröm volt oda járni. Nem csak konkrétan az érettségire segített felkészülni, hanem már az egyetemre is fokozatosan. Számomra kivételesen sokat számított a munkássága, ugyanis a Tanár Úr is nagy szerepet játszott abban, hogy a tanári pályát válasszam. Hiszen, lássuk be, nem sok tanár lenne képes csak miattunk leutazni Kiskőrösre, és tartani még órát délután négyig. Emellett az irodalomtudásunkat is fejleszthettük, hiszen Szép Heléna és Fanni hagyományai rendszeresen részt vettek az órákon. (Fanni)

– És hogyan látnak a kicsik?

Amikor megtudtam, hogy egy matematikaprofesszorhoz járok különórára, kissé megijedtem, nemcsak a szakmai kihívástól, hanem attól, hogy az ilyen típusú embert csak, hideg, rideg, a számok és egyenletek világában élő személyiségnek tudtam elképzelni. Ehhez képest megtapasztaltam, hogy egy ilyen komoly tudományt is lehet játékosan, humorral fűszerezve tanulni.

Bár nyilvánvalóan Bandi bácsi élete a matematika és a matematikatanítás, számomra legmegkapóbb benne, hogy tisztában van vele, hogy a számokon túl is van élet. Nagyon örül a versenysikereimnek, de gyakran figyelmeztet, hogy azért ne hajtsam túl magam. Ezzel az életfilozófiával én mélyen egyetértek. Ezt is köszönöm Neki. (Bálint)

– …Ambrus „Bandi" bácsi?

Egy nagyon magas, nagyon vicces bácsi… Ezt gondoltam róla, mikor 11 évesen először beszéltem vele. Ma is ugyanezt mondanám róla, azon túl ,hogy senkivel nem találkoztam, aki nála többet tudna a számokról. Csoda dolgokat tud!

Nekem Ő, Ambrus András a matematika professzora. Szeretnék egyszer annyit tudni valamiről, bármiről, mint amennyit ő tud a matematikáról! (Bendegúz)

Miért szeretem én a péntek délutánokat?

Főként azért, mert felidézik diákéveim hangulatát. Akárcsak mi annak idején, tanítványaim is átveszik a belőled áradó lelkesedést, rácsodálkoznak a matematika szépségére, megtapasztalják a közös munka örömét, az egészséges rivalizálás izgalmát. És közben megismerik a mindennapjaidat átszövő életfilozófiádat:

„Ha sikeres akarsz lenni, a dolog nagyon egyszerű. Érts ahhoz, amit csinálsz! Szeresd, amit csinálsz! És higgy abban, amit csinálsz! Igen, ilyen egyszerű ez." (Will Rogers)

Te így élsz, ezt tanítod. Kell ennél több?

Kedves Bandi!

Születésnapod alkalmából szeretettel köszöntelek, és szívből kívánom, hogy

„Sok születésnapokat vígan megélhess,
Napjaidat számlálni ne légyen terhes,
Az ég harmatja szívedet újítsa,
Áldások árja házad elborítsa."

Kelemen Ildikó,
egykori tanítványod

Bogáromi Dávid

matematikus egyetemi hallgató, ELTE TTK

Találkozás

Hatodik osztályba jártam a soltvadkerti általános iskolában. Szerettem a matematikát, és látható volt, hogy van tehetségem hozzá. Már három éve jártam a Zrínyi Ilona matematikaversenyre, de ebben jóformán ki is merült az ismeretségem az általános iskolás anyagon túli matematikával. A soltvadkerti iskolában viszonylag jó volt a matematikaoktatás, de ez leginkább azt jelentette, hogy jól megtanították, hogyan kell törtet törttel szorozni; fejtörők, gondolkodtató logikai feladatok csak ritkán kerültek elő, ha egyáltalán.

Ebben az évben indult hetedik és nyolcadik osztályosoknak matematika szakkör Ambrus András vezetésével, amiről nyolcadikos bátyámon keresztül szereztem tudomást. Én is kipróbáltam, és kiderült, hogy sok érdekes és gondolkodtató feladattal találkozhatok, valamint hogy ezek nem haladják meg a képességeimet. Így kezdődött el a sokéves tanítás, amit Ambrus Andrásnak köszönhetek, először szakkör, majd gimnáziumi éveim alatt különórák formájában.

Ennyi év alatt persze sok más helyen is találkoztam érdekes matematikával. Rendszeresen jártam versenyekre, emellett jártam az Erdős Pál Matematikai Tehetséggondozó iskola hétvégi táboraiba, nyaranta Medve Matektáborba és a Matematikai Mulatságok Táborába, valamint a Pósa Lajos szervezte hétvégi táborokba. Ezek mindegyikének megvolt a maga szerepe a sokféle hatás között, ami engem ért.

Amit tanultam

Noha az elemi geometria feladatoknak is megvan a maga varázsa („aki a geometriát szereti, rossz ember nem lehet", mondta min-

dig), a teljes indukció is egy hasznos eszköz, és az olyan klasszikus feladatok is érdekesek, mint például az első száz pozitív egész szám összeadása; ezekkel lépten-nyomon találkozhattam. Azokat a főbb motívumokat emelném ki inkább, amelyekkel ő ismertetett meg, és amelyek egyedivé tették a szakköreit, különóráit.

A térgeometria a magyar tehetséggondozásban egy ritkán taglalt téma, pedig jól fejleszti a térlátást. Ezek a feladatok szorosan összekapcsolódtak a koordinátageometriával, ahol megtanultam, hogy a vektor nem csupán egy irányított szakasz, hanem egy sokoldalú matematikai objektum, és már nem volt kényelmetlen vektorokkal felírni egy egyenletet (vagy egyenletrendszert, nézőpont kérdése). Ez később sokat segített a lineáris algebra megértésében. A témakörben a legmeghatározóbb gondolat a mátrixok szemléletes jelentése volt: a mátrix meghatározza, hogy egy gyárban az egyes késztermékekhez mennyi nyersanyagra van szükség. Ha egy vektorban megadjuk, hogy melyik késztermékből mennyit szeretnénk, akkor a mátrix vektorral való szorzata az összes nyersanyagigényt fogja adni. Ha pedig két mátrix van, melyek egyike a késztermékek félkésztermék-igényét, a másik pedig a félkésztermékek nyersanyagigényét határozza meg, akkor a kettő szorzata éppen a késztermékek nyersanyagigényének mátrixa lesz. Ez a szemlélet alapjaiban határozta meg azt, hogy ma hogyan tekintek a lineáris transzformációkra, és általában a lineáris algebrára.

Számtalanszor előfordult, hogy számelméleti vagy geometriai problémáknak, összefüggéseknek geometriai jelentést adtunk. Ezekből néha újabb, az eredeti problémafelvetésben varázslatosnak, érthetetlennek tűnő összefüggéseket lehetett észrevenni; mint például amikor négyzetek, amelyeknek oldalhossza a Fibonacci-sorozatot követi, spirálisan egymás mellé illesztve éppen téglalappá állnak össze. Sokszor nem érdemes megállni, ha megtaláltunk egy összefüggést, mert lehet, hogy ha tovább vizsgáljuk, valamilyen mélyebb jelentést veszünk észre. Geometriai szemléltetést még a négy közép közötti egyenlőtlenségeknek is lehet adni, ha kellőképpen trükkösen vesszük fel a szakaszokat. A problémák geometriai vizsgálatának csúcsa a „szavak nélküli bizonyitások" voltak, amelyek nevükhöz méltóan kizárólag ábrák segítségével bizonyítottak egy-

egy tételt. Sokszor hangsúlyozta azt, hogy mennyire fontos az, hogy egy problémának szemléletes jelentése legyen; ugyanazt a gondolatot sokkal könnyebben tárolja el az emberi agy, ha azt a szemléltetés felől közelíti meg. Szó volt még többek között a heurisztika szerepéről a problémamegoldásban, valamint arról, hogy hogyan segítheti a probléma megértését egy speciálisabb vagy éppen általánosabb eset vizsgálata. Egy diákban általában nem merül fel az, hogy azért nehéz megérteni egy bizonyos gondolatot, mert rossz oldalról közelíti meg; azt fogja hinni, hogy egyszerűen túl nehéz, hogy a képességei fölött van. Szerintem fontos lenne ezt hangsúyozni az iskolai matematikaoktatásban is, legalább a kérdésfelvetés erejéig, hogy a diákoknak legyen fogalmuk erről a tanagyag és a tanuló közötti tényezőről, mert meghatározó szerepet játszik a sikeres tanulásban.

Ezek a kérdésfelvetések azt is elérték, hogy sokat foglalkoztat az a kérdés, hogy egy adott matematikai gondolatot hogyan lehet átadni, megtanítani (ami egyáltalán nem egy természetes kérdés, magamtól nem vetettem volna fel). Ezt azóta nem kizárólag a saját tanulmányaim során hasznosítottam: a Medve Matektáborokban már többször is tartottam foglalkozást, amelyekből talán még többet is tanultam, mint amennyit megtanítottam.

Amit tanítottam

Tanítási tapasztalatom leginkább a Medve Matektáborból van. Egy ilyen egyhetes táborban a diákok négy másfélórás foglalkozáson vesznek részt egy tanárral. Az ide járó diákok sok különböző helyről jönnek, de legtöbbször elmondható, hogy matematika iránt érdeklődő, gyakran matematika tagozatos iskolába járó, versenyeken rendszeresen szereplő diákokról van szó. A foglalkozások tíztizenötfős csoportokban zajlanak.

Középiskolás korosztályoknak tartott foglalkozásaimból azt a következtetést vontam le, hogy az elsődleges tényező, ami nehézzé teszi egy gondolat megértését, az a gondolat absztraktsága. Egy könnyű feladatból, ami 2017 darab számra vonatkozik, nehezebbet lehet csinálni, ha 2k+1 darab számra van feladva, még akkor

is, ha ez magán a megoldáson semmit sem változtat, és akkor is, ha minden diák magabiztosan kijelenti, hogy a két feladat között semmi különbség nincs. Ezért a foglalkozásaimmal azt szeretném elérni, hogy kényelmesebben bánjanak az absztrakt objektumokkal. Az elsődleges cél persze az, hogy pozitív élményeket szerezzenek a matematikával kapcsolatban, mert hosszú távon az ilyen élmények fogják őket a problémamegoldó gondolkodásra motiválni.

Erre a célra meglepően alkalmas témakör a csoportelmélet. Elsőre a legkevésbé sem tűnik egy középiskolások számára alkalmas témának, de tapasztalataim szerint szemléletesen, feladatokon keresztül, az absztrakciót tudatosan adagolva jó foglalkozásokat lehet tartani.A csoportelméleten belül számtalan irányba el lehet kalandozni, reális végcél lehet négyszer másfél óra alatt például a csoport absztrakt definíciója és annak megértése, vagy a Lagrange-tétel megértése a precíz kimondása nélkül. Meg lehet vizsgálni sok csoportot, amelyekkel egy középiskolás is gyakran találkozik, vagy amelyről könnyen szerezhet intuitív képet, például a különböző számhalmazok a szokásos műveletekre, geometriai transzformációk, permutációk, maradékosztályok, de megfelelő szemléltetéssel akár a végesen generált szabad csoportok és faktorcsoportjaik is. A szabad csoportok esetében ráadásul teljesen absztrakt objektumokkal kell dolgozniuk, és fel lehet adni olyan problémákat is, amelyben az egyetlen tényleges feladat az absztrakció leküzdése. Amellett, hogy rengeteg önmagában is érdekes feladatot kínálnak, ezek mindegyikében feltárható az inverz fogalma és ennek következménye a csoport szerkezetére nézve, a részcsoportok és a mellékosztályok létezése, vagy akár a faktorizálás intuitív jelentése. Végső soron ezeknek a lényege az a heuréka-pillanat, hogy az egyik csoportnál megvizsgált jelenség és a másik csoportnál megvizsgált jelenség lényegében ugyanaz; ebben a pillanatban születik meg a két speciális esettől elvonatkoztatott, absztrakt objektum. Erre a lépésre az egyetemi matematikaoktatásban kevés idő jut, és sokszor meg kell lépni, de más területen is hasznos lehet; ez egy olyan lépés, amit érdemes megtapasztalni.

Budai László

A példaképek fontossága az életben

Néhány szó magamról

Budai Lászlónak hívnak, matematika-informatika tanár vagyok. 2017-ben sikeresen szereztem doktori PhD. fokozatot a Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolájában, matematikadidaktika doktori programon. Ambrus András Tanár Úr nem csupán a kezdetektől, hanem még a kezdeteket megelőzően is példaértékű személyiséggé vált számomra. Mind szakmai, mind pedig emberi szempontból figyelemre méltó tulajdonságokkal rendelkezik, mely tulajdonságok révén képes hozzásegíteni a jövő nemzedékeit egy értékesebb, nemesebb célokat kitűző élet megéléséhez, kezdve az általa tanított kis általános iskolás gyerekektől egészen a PhD.doktoranduszokig, doktorjelöltekig. Bátran ki merem jelenteni, hogy Ambrus Tanár Úr igazi, a szó legteljesebb értelmében vett példakép lehet mindannyiunk számára, mely a következő néhány sorban részletesebben is kifejtésre kerül.

Az első találkozás

2010 júniusában végeztem el a matematika-informatika MA képzést Egerben, és úgy döntöttem, hogy lenne még kapacitásom tovább is folytatni tanulmányait, mely ezesetben a PhD. képzést jelentheti. Ekkortájt az országban két helyen volt elérhető ilyen képzés, Szegeden, és Debrecenben. Felkerestem volt oktatóimat Egerben, és általuk kerültem először kapcsolatba számos olyan kollégával, akiktől sokat tudok majd tanulni leendő a PhD. képzésem folyamán: Kovács András, JánGuncaga, Körtesi Péter, Lajkó Károly,

Nyakóné Juhász Katalin…és a sor egyre csak bővült az eltelt hónapok, évek folyamán.

2010 őszén beadtam felvételi kérelmemet a Debreceni Egyetemre, matematikadidaktika doktori programra. Többen azt javasolták, hogy még mielőtt elmegyek majd tavasszal a felvételi elbeszélgetésre, részt vehetnék esetleg egy konferencián. Ekkor még nem rendelkeztem olyan kutatási eredményekkel, így csupán nézőként jöhetett szóba a részvétel. Az időzítés következtében a januári MIDK 2011 -re sikerült eljutnom, melyet abban az évben Romániában, Szatmárnémetiben tartottak. Örömmel tapasztaltam, hogy volt ott néhány leendő társam is, akik még ugyanabban a cipőben jártak, mint én: tapasztalatot próbáltunk szerezni, belekóstolni a kutatói életbe.

Ekkor, 2011 januárjában találkoztam először Ambrus Tanár Úrral, és már az első pillanatokban megfogott a humorérzéke, melyhez mindig vidám, mosolygós arc társult.

„Janikám, te is itt vagy?" – így szólt JánGuncagához (későbbi témavezetőmhöz), mikor beléptem vele az ebédlőbe. „Ő Jani, amikor magyarul beszélgetünk, akkor magyarul is kell mondani, szóval Jani…". Mindenkihez volt egy-két jó szava, vicces megjegyzése. Ez a közvetlenség nagyban hozzásegített engem, hogy otthon érezzem magam az akkor még nagyrészt ismeretlen társaságban, szituációban.

Valamelyik este vacsoránál volt szerencsém Tanár Úrral váltani néhány szakmai szót, és kiderült, hogy ő bizony szakdidaktika területen mozog, és beszámolt az őt éppen aktuálisan foglalkoztató témákról: a friss agykutatási eredmények tükrében milyen következtetéseket lehet levonni a tanulás folyamatára vonatkozóan, munkamemória használata… Érdekesnek tartottam az általa elmondottakat, hiszen ez lehet az egyik kulcsa a sikeres tanításnak is talán.

A második találkozás

2011 tavaszán felvételt nyertem a doktori iskolába. A matematikadidaktika programon teljesítendő tantárgyak többsége természetesen ehhez kapcsolódott, így három tárgy esetében Ambrus Tanár Úr jöhetett szóba. Az első tárgy esetében 2011 szeptemberében

e-mailen egyeztettünk egy időpontot, mikoris tudunk majd találkozni, és megbeszélni a részleteket. Az ELTE épületébe mentem, az irodájához a megbeszélt időpontra. Sajnos nem emlékezett rám ekkor Tanár Úr, hogy találkoztunk már egyszer egy konferencián, és így egy igen érdekes, utóbb mesélve már vicces történet kerekedett egy félreértésből kifolyólag.

Kopogtam kétszer az irodája ajtaján, de zárva volt. Ekkor láttam a folyosón felém közeledni, és már messziről a következőket mondogatta nekem, kissé felháborodott hangnemben:

„Magát is lehet látni!"
„Csakhogy végre itt van!"
„Ideje volt!"

Azt hiszem, nem tagadhatom le, hogy nem ilyen fogadtatásra számítottam, főleg azok után, ahogy megismertem a konferencián. Igazából tágra nyitottam a szemem, és vártam, hogy odaérjen hozzám, de szólni hirtelen nem tudtam semmit.

„Na, akkor mi volt magával?!"
„Néha felbukkan?!"

Ekkor már kezdett megerősödni bennem az a gyanú, hogy itt bizony valami erős félreértés lehet, de ha mégsem, akkor elképzelhetően nehezebb lesz majd a tárgyat teljesíteni, mint elsőre gondoltam volna. Erőt merítettem, és átvettem a szót végre valahára, jobbhíján bemutatkoztam, hiszen egyébként sem tudtam volna semmit az eddig elhangzottakhoz érdemben hozzáfűzni.

„Jó napot Tanár Úr, Budai László vagyok, első éves PhD. hallgató, mostanra beszéltünk meg időpontot…".

Ekkor érzékeltem már, hogy a szituáció valóban félreértés lehetett, Tanár Úr sűrűn elnézést kért, összetévesztett valakivel.

„Tudja, van egy hallgató, aki …"

És elmesélte a történetet. A történetet egy olyan PhD. hallgatóról, amilyen reményem szerint soha nem fog belőlem válni.

Már ekkor, az első tantárgyhoz kapcsolódó első konzultáción mérhetetlen türelemmel, odaadással mesélt módszertani tapasztalatairól, és rengeteg segédanyaggal árasztott el. Ami azonban kimondhatatlanul jól esett, hogy már ekkor kollégaként kezelt, letegeződtünk stb., amihez azért valljuk be egy nappalin (vagy akár levelezőn) tanuló hallgató alapvetően nem nagyon tapasztalhatott az oktatóktól.

Így Tanár Úrtól kaptam az első kellemes élményeimet a PhD. képzésem során.

Ljubljanai napok

Tanár Úr nem csupán szakmai, hanem technikai szempontból is nagy segítséget nyújtott a PhD.- és éveim során. Ezek közül talán az egyik ilyen leghasznosabb lehetőség, amire felhívta a figyelmemet: aProMath 2012 konferencia, mely Ljubljanában lesz megtartva. Felajánlotta Tanár Úr, hogy elkísérhetném őt oda, és ez egy nemzetközi, angol nyelvű konferencia, melyhez tartozóan meg is fog jelenni egy kiadvány, melyben teljes cikk formájában közölhetjük a kutatási eredményeinket. Mondanom sem kell, hogy a PhD. elején ez mit is jelentett számomra.

Budapestről indultunk autóval, és egy doktorandusz társam is velünk tartott. A 650 kilométeres út alatt nagyon sokat tudtunk beszélni nem csupán szakmai, de magánéleti témákról is.

A szállás úgy alakult, hogy én Tanár Úrral voltam egy szobában, így az esti beszélgetések során is sikerült egymást jobban megismernünk, és mondhatom, hogy talán ezek a ljubljanai napok alatt váltott a kapcsolatunk szakmai jellegűből barátságra.

Az előadásom miatt nagyon izgultam, mert bár egy kisebb hallgató közönséggel találtam szemben magam, de mindegyikük szakmájának kiváló, elismert képviselői voltak, mint ahogy Ambrus Tanár Úr is természetesen, illetve ez volt az első angol nyelven tar-

tott előadásom. Így kicsit úgy éreztem, hogy valamiféle belső körbe kerültem most bele, ami önbizalommal töltött el a jövőre nézve, és ezt mind Tanár Úrnak köszönhettem.

Az angol nyelvű előadásommal kapcsolatos aggályaimat viszont jeleztem Tanár Úrnak, aki megnyugtatott, hogy nem lesz semmi gond, menni fog, majd ő besegít, ha szükséges. Az előadásom jól sikerült, Tanár Úr megdicsért, és nem értette, hogy miért aggódtam ennyire, hiszen minden simán ment. Azt hiszem, ez az élményem nagyban hozzájárult ahhoz, hogy azóta már bátrabban merek angol nyelven is előadni.

Az ezt követő években jónéhány konferencián összefutottunk még, és mindig barátként üdvözöltük egymást, szinte úgy éreztem, mintha nem is csak hat éve ismerném, hanem jóval régebbről már.

A szóbeli doktori szigorlat

Miután teljesítettem Tanár Úrnál három PhD. képzéshez tartozó szakdidaktika jellegű tárgyat, nem volt kérdés, hogy a szakdidaktika PhD. szigorlat esetében ő a legkompetensebb tag, aki csak szóba jöhet a bizottság összetétele során. Tanár Úr volt oly kedves, és elfogadta ez irányú felkérésemet.

Megbeszéltük, mely könyvekből, jegyzetekből szükséges majd felkészülnöm, illetve ezeken túl még nagyon fontos az a sok módszertani jótanács, mely beszélgetéseink során hangzott el.

A vizsga nem a hagyományos értelemben vett atmoszférájú volt, hanem inkább egy olyan beszélgetés volt ez Tanár Úrral, mintha két pedagógus ülne a tanáriban nagyszünetben, és diskurálnak a módszertani kérdésekről. A vizsga egy részében meséltem a kutatási eredményeim aktuális állásáról is az adott módszertani témakörök kapcsán, melyet nagy érdeklődéssel hallgatott végig.

A vizsga után felajánlottam, hogy elviszem őt Budapestre, mert autóval voltam és oda tartottam én magam is. Így alkalmunk nyílt még valamivel több, mint két órát beszélgetni, ami mondanom sem kell, jóval fesztelenebb volt, mint a szigorlat közben.

Az autóban sok minden szóba került, módszertani témákon kívül oktatáspolitikai kérdések, magánéleti jótanácsok… Én ezeket nyitott fülekkel, és főleg nyitott szívvel hallgattam.

Az öt év alatt olyan példát kaptam Tanár Úrtól a jövőre vonatkozóan, mely szerint, ha sikerül élnem, remélhetőleg én is ilyen széles látókörű, a hivatását tisztelő, szerető pedagógus leszek, mint Ambrus András. Ebben reménykedem.

Szerénység mindenek felett

Ezt kénytelen vagyok külön fejezetként kiemelni, mert akárhányszor szóba jött konferenciákon, konzultációkon, egyéb beszélgetések során, számtalanszor hallottam Tanár Úrtól a következő mondatot:

„Én csak egy egyszerű tanár vagyok."

Az, hogy egy szakmailag és emberileg ilyen magasan kvalifikált oktató, pedagógus így valljon magáról, ritkán tapasztaltam még, ugyanis ezen tulajdonságok viszonylag ritkán ötvöződnek egy emberben. Ezért állít példát véleményem szerint mindannyiunk elé. Ilyen emberek kapcsán láthatjuk, érezhetjük azt, hogy pedagógusnak lenni nem egy munka, hanem hivatás, mely egész életen át tart, és valami magasztosabb cél elérésére használjuk tudásunkat, tapasztalatunkat.

Mindezek alapján meggyőződésem, hogy ha lenne minden egyes általános iskolában, középiskolában és egyetemen egy Ambrus András, akkor minden bizonnyal sokkal több tanuló értené és szeretné a matematikát.

Tihanyi (Szikora) Klára, matematika – fizika – informatika szakos tanár, igazgatóhelyettes Szeged

– ***Dr. Ambrus András matematikatanár mit jelentett, mit adott nekünk?***

A kiskőrösi Petőfi Sándor Gimnáziumban Ambrustól a szerethető matematikát kaptuk.
Az Ő egyénisége, magyarázatai hozzásegítettek bennünket ahhoz, hogy személyesen éljük át a feladatmegoldások örömét.
Az Ő tanításában a matematika-feladatok megoldása társult a közösségi élettérrel.

- Ambrus tanár úr szervezett nekünk baráti találkozókat, emlékszem a szentendrei Móricz Zsigmond Gimnáziumra, ahova Ambrus tanár úr személyes kapcsolata révén jutottunk el, s egy baráti matematikaversenyen vettünk részt. Ez társult egy kirándulással is. A tanulást és a közösségi programokat összekapcsolta, melynek során elterelődött a figyelmünk a tantárgy nehézségeiről.
- Ambrus tanár úr, amikor be kellett vonulnia tartalékos katonai szolgálatra, akkor sem hanyagolt el bennünket. Postán feladatsorokat küldött nekünk egyetemre készülőknek, amit mi megoldottunk, s visszaküldtük neki. Ő kijavította a megoldásainkat, s visszajutatta nekünk. Ő annak idején kézzel írta nekünk, mindenkinek egyedi feladatsort. Az Ő ötletét, a feladatsorok levelezés útján történő cseréjét igazolta az élet, hiszen ma már számtalan ilyen levelezős verseny, levelezős felkészítés létezik.
- A tanítással együtt segített nekünk megtalálni az életcéljainkat. Aki ügyes volt a természettudományokban, azokat arra terelgette; akit a tudomány más területe érdekelt, azt pedig

biztatta, hogy a humán vagy az orvostudomány irányában menjen tovább. Annak idején (1970-es évek eleje) még nem voltak továbbtanulási tájékoztatók, Ambrus tanár úr volt, aki a világot elénk tárta, Kiskőrösről hova, milyen irányba lehet tovább lépni.

Matematikatanári munkámban Ambrus tanár úrtól a problémamegoldás módszertani megoldását próbáltam legtöbbször megvalósítani.

„A matematikatanítás célja"

A matematikatanítás célja a sokoldalú matematikakép kialakítása a tanulókban, melynek eredményeképpen a matematikára úgy tekintenek, mint

- a környező világ megértésének, sok valós életbeli probléma megoldásának, számos szakmai irányú, illetve felsőfokú tanulmány nélkülözhetetlen eszközére,
- az általános szellemi képességek, magatartásformák, hozzáállások fejlesztésének eszközére,
- az emberi kultúra értékes részére,
- örömet okozó, gondolkodtató, szórakoztató szabadidős tevékenységre.

Módszertani alapelvek

Aktív ismeretelsajátítás, tanulói önállóság.

A tanulás és megértés egy komplex környezetben történik, melyben fontos szerepet játszanak valódi kontextusok (problémák, jelenségek), matematikai objektumok, külső és belső reprezentációk, egyéni gondolkodási struktúrák, ezekkel kapcsolatos képzetek. A belső reprezentációk kapcsolatban állnak egymással, összefüggő hálózatot alkotnak. A hatékony problémamegoldó folyamatban

központi jelentőségük van a metakognitív ismereteknek, képességeknek (saját gondolkodásról való tudás).

Sokféle megoldás ösztönzése, a különböző megoldások összehasonlítása a feladatmegoldás tanításában.

Tartalmi indoklások előtérbe helyezése (főleg az alsóbb osztályokban), a problémamegoldó képesség fejlesztése.

Stabil fogalomképzetek kialakítása. A matematikai kapcsolatok, összefüggések fontossága.

Alappozíciók a problémamegoldás tanításával kapcsolatban

„I am a teacher of 90%!" – kezdte az előadását egy nemzetközi konferencián az előadó. Engem is jobban érdekel a 90% , azaz az átlagos tanulók problémái a feladatmegoldás során.

A feladatmegoldás tanításának nem lehet kizárólagos célja a következő vizsgára való – érettségi, felvételi – felkészítés. A problémamegoldó képesség általános fejlesztése fontosabb cél, hiszen az a jövendő életben jobban kamatozik.

A problémamegoldási stratégiákat, gondolkodási műveleteket is az oktatás tárgyává kell tenni, tudatosan tanítani kell őket. A legtöbb matematikus nem érdeklődik igazán a saját gondolkodási módjának elemzése iránt, nem írja le, hogyan dolgozik. Sajnos, sok matematikatanár ezt az elvet követi tanításában. A legtehetségesebb tanulók néhány példa alapján rendre meglátják a lényeget, a struktúrát, a fő ötletet, megjegyzik és alkalmazni is tudják azokat a jövőben. A közepes és gyengébb tanulók számára elengedhetetlenül szükséges az alkalmazott *heurisztikus stratégiák, gondolkodási műveletek explicit kiemelése,* tudatosítása, elsajátíttatása. Talizina szerint nem várható el hatékony feladatmegoldás a tanulóktól, ha annak eszközeivel nincsenek tisztában.

A legtöbb esetben a problémamegoldási folyamat lényegesebb, mint a kapott eredmény. A problémamegoldási folyamat struktúráját többször is fel kell vázoltatni a tanulókkal."

Matematikatanárként igyekszem Ambrus tanár úr szellemében

tartani a matematika órákat, azaz az osztály minden tanulója szerethető, tanítható – igaz nem egyforma mértékben tanítható, de célom, hogy a matematika órák hangulatát a gyengébb matekosok is élvezzék.

Dr. Ambrus András matematikatanáromnak jó egészséget, s hosszú életet kívánok!

Kívánom, hogy korosabb **éveit** is töltse szeretetben, abban a tudatban, hogy az Ő munkássága sokaknak sok mindent adott az emberiesség, a matematika tanulása, taníthatósága, szeretete terén!

Szeged, 2017. szeptember 1.

Tihanyi Klára (Szikora Klára)
Szeged
tihkla@gmail.com

Ambrus Gabriella

ELTE, TTK, Matematikatanítási és

Módszertani Központ

Feladatkészítés valós szituációhoz a matematikaórán – tapasztalatok magyar tanulók és tanárszakos hallgatók körében

Megtiszteltetés számomra, hogy írhatok ebbe a kötetbe és ezzel is köszönthetem Andrást.

Sokat tanultam tőle emberségben, kitartásban és szakmai téren is, de gondolom ezt rajtam kívül sokan elmondhatják még. Nagyon örülök, hogy néhány évig közvetlen „főnököm" is volt.

A kilencvenes években fontos szerepe volt abban, hogy akkor még fiatal oktatóként bekapcsolódhattam a német és osztrák kollégákkal egyre jobban fejlődő kapcsolatokba, amit külön köszönök neki (is), hiszen szakmai fejlődésem alakulása szempontjából ez döntő jelentőségű volt. Úgy gondolom, az a német-magyar közös kutatás, ami az alábbi tanulmány hátterében áll szintén egy „késői" eredménye ezeknek a sok-sok évvel ezelőtt indult kapcsolatoknak.

Bevezető

A matematikaoktatásban a problémamegoldó gondolkodás fejlesztését elsődlegesnek tartom. Úgy vélem, hogy a szükséges rutin megszerzése bizonyos eljárásokban csak eszköz a feladatmegoldásban, de semmiképpen sem cél. A problémamegoldó gondolkodást sokféleképpen és egyéni lehetőségeket képességeket figyelembe véve kell fejleszteni- ennek egyik lehetőségét tárgyalja az alábbi tanulmány.

Valós szituációkon alapuló feladatok iskolai alkalmazásának fontossága vitathatatlan, ám a konkrét feladatok mégis gyakran elképzelt szituációkon, kitalált adatokon alapulnak, mint például a PISA vagy a kompetenciamérések alkalmazásorientált feladatainál. Valós szituációk oktatásba való bevonásának egyik lehetősége, hogy a megadott anyag alapján kérdést/kérdéseket kell megfogalmazni. Feladatok megfogalmazása bizonyos adatokra támaszkodva általában egy összetett nyitott probléma, hiszen többféle matematikai tartalmú és megfogalmazású kérdés tehető fel és ez nehézséget okozhat. Az elkészült kérdések a „megfogalmazók" matematikával kapcsolatos elképzeléseibe, matematikai tudásába is bepillantást engednek.

A következőkben egy jelenleg folyamatban levő német-magyar közös kutatás magyar vonatkozású eredményeiből mutatok be, – (Ambrus, G., & Fritzlar, T., 2017) – amely az valós adatokat tartalmazó információs anyaggal kapcsolatos tanulói feladatkészítésel foglalkozik és ezen kívül kitérek magyar tanárszakos hallgatók körében végzett hasonló felmérésre is.

Elméleti háttér

A problémamegoldás és probléma kitalálás/megfogalmazás igen fontos matematikai tevékenység, amely a matematika tanulásában egy idő óta különös figyelmet is kap mint módszer és mint cél (Silver & Cai, 2005), sőt jelenleg dinamikusan fejlődő terület is a módszertani kutatásokban (pl. Singer, Ellerton, & Cai, 2015).

Problémák megfogalmazása – didaktikai vonatkozások

Problémák megfogalmazása és megoldása nemcsak szoros kapcsolatban van egymással, és igen jelentős a matematika, és a matematikai gondolkodás számára hanem egyúttal kreatív tevékenység is (Silver, 1997).

A kreativitás pedig az emberi életben alapvető jelentőségű. Csíkszentmihályi szerint két ellentétes parancssorral szüle-

tünk, az egyik a konzervatív az önfenntartásra, gyarapodásra, és energiamegtakarításra sarkall, míg az úgynevezett „expanzív explorációra" vonatkozó parancssor új dolgok élvezetére, kockázatvállalásra ösztönöz. Ez utóbbiba beletartozik a kreativitás előfutára a kíváncsiság is. Úgy gondolhatjuk tehát, véli Csíkszentmihályi, hogy társadalmunkban mindenhol támogatásra talál a kreativitás, a kreatív gondolkodás, de ez nem így van. A globális gazdaság előnyben részesíti a költségcsökkentést szemben a fejlesztésbe történő befektetéssel, ami kockázatvállalást is jelenthet. Csíkszentmihályi ebben párhuzamot lát az oktatásban történő folyamatokkal; mivel egyre kevesebb a pénz, az iskolák a kötelező anyagra koncentrálnak, a művészeti tárgyak, de különösen a kiegészítő tananyagtartalmak, amelyek éppen a tanulók kreativitását fejlesztenék, a háttérbe szorulnak (Csíkszentmihályi, 2008, 21, 22).

A matematikai kreativitás általában elfogadott meghatározása szerint „… refer to the components of *fluency, flexibility, and originality* and some also add a fourth dimension of elaboration, factors commonly used in definitions of general creativity…" Sheffield (2013, 427). Ennek hallatán elsőre inkább a kimagasló, eredeti gondolatokkal megáldott tehetség jut az eszünkbe.

Szemben a kreativitás „genius" szemléletével, amely meglevő adottságra épít, és így lényegileg nem befolyásolható, Silver egy másféle kreativitást is említ, ami „is closely related to deep, flexible knowledge in content domains; is often associated with long periods of work and reflexion rather than rapid, exceptional insight; and is susceptible to instructional and experiential influences" (Silver, 1997, 75.). Ez utóbbi kreativitás – szemlélet a fejlesztés lehetőségét jelenti a tanulás-tanítás révén és ezen túlmenően azt az álláspontot is alátámasztja, mely szerint problémamegoldás nemcsak a kiválasztott, tehetséges kisebbségnek lehetséges.

Az iskolai oktatás keretein belül hiányosan megadott és nyitott végű feladatokkal a kreativitás több tekintetben is fejleszthető (Silver, 1997), ugyanis a nyitott feladatokat először értelmezni kell, ami egyrészt lehetővé tesz többféle lehetséges megoldást, másrészt a tanulók sok tapasztalatot is gyűjthetnek különféle interpretációk illetve ezekhez tartozó megfelelő megoldások készítése terén.

A nyitott feladatok, amelyek például készíthetők problémafelvetések, problémavariációk révén, a különböző képességű tanulók számára is lehetővé teszik, hogy saját képességeik alapján dolgozzanak és így sikerekhez jussanak, és ezáltal akár más feladatokban nem jeleskedő, rejtett tehetségek felismerését is segíthetik (Way, 2013).

Problémafelvetés valós helyzetekben

Hollenstein und Eggenberg egy olyan módszert említ, amelynél a tanulók nyitott szituációkkal dolgoznak (Hollenstein & Eggenberg, 1998), úgynevezett „Startanyag" -t használva kiindulásként. Ennek segítségével először példafeladatokat és megoldások készítésére kerül sor a tanárral, majd ezt követi további anyag gyűjtése a témához, valamint ezekhez tartozó kérdések megfogalmazása, melynek során a tanulók már egyénileg vagy csoportosan dolgoznak. Ebben az esetben a példák segítségével a tanár azt is nyilvánvalóvá teszi, hogy milyen jellegű kérdésekre gondol elsősorban.

Katzenbach hasonló módon egy bevezető fázis után a tanulóinak anyaggyűjtést és ezekhez tartozó kérdések megfogalmazását adja feladatul. Az „anyag" itt újságcikkeket jelent, és a tanulók által összeállított feladatlapok megoldását más tanulók végzik el (Katzenbach, 1996).

További szakirodalmat tekintve valós problémák/kérdések felvetésénél főleg adott műveletsorok, valós szituációk és már meglevő feladatok (z. B. Silver & Cai, 1996) vagy egyszerű szöveges feladatok, diagrammok, ábrák (Pl. Christou et al., 2005), esetleg számtani-geometriai mintasorok (Pl. Arikan & Unal, 2015) szolgálnak kiindulási anyagul. Mindennapi életből vett anyagokat, prospektust, étlapot is használnak tanulói kérdések megfogalmazásához (Pl. Bonotto, 2013).

Komplex valós tartalmú szituációkon alapuló kérdésfeltevéssel kapcsolatban azonban alig találunk tanulmányt, annak ellenére, hogy az utóbbi időben a módszertani szakirodalomban megjelent a modellezési folyamat és a problémafelvetési folyamat egymást közvetlenül támogató jellegének vizsgálata (Hansen & Hana, 2015, 39).

Jelenleg hiány mutatkozik olyan empirikus kutatással foglalkozó kutatásra is a szakirodalomban, amely arra kérdésre keresné választ, hogy

– mennyire képesek tanulók (5-12. évfolyam) külön előkészítés nélkül és önállóan, problémákat, feladatokat megfogalmazni komplex, valós tartalmú szituációkhoz és hogy

– milyen jellegű kérdéseket tesznek fel.

A felmérés módszere

Egy nagyobb felmérés keretében – német és magyar tanulók körében – a jelen témával (információk méhekről) kapcsolatos feladattal összesen 8 iskolai óra keretében dolgoztam 146 magyar diákkal (70 közülük 6. osztályos, 76 pedig 8. osztályos volt), 2016 őszén. A két évfolyam kiválasztására a feladattal 5., és 7.osztályokban szerzett előzetes tapasztalatok alapján került sor.

A felméréseket általános iskolákban és gimnáziumokban végeztem, az órákat, a tanár jelenlétében én tartottam. A tanulók korábban a tanórákon nem szereztek tapasztalatot ilyen jellegű feladattal kapcsolatban- ezt minden esetben a szaktanárral is tisztáztam.

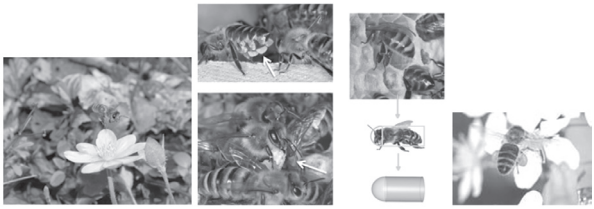
Egy rövid bevezető és 3-4 fős csoportok kialakítása után a tanulók egy méhekkel kapcsolatos információkat tartalmazó feladatlapot kaptak *(1. ábra)*, valamint A3-as lapot és filceket a kérdések felírásához. A feladatuk az volt, hogy olyan kérdéseket írjanak fel a méhekkel kapcsolatban, amelyek megválaszolhatók a lapon található információk segítségével.

A munkához legfeljebb 15 perc állt a rendelkezésükre, akik készen voltak végül a táblára erősíthették lapjaikat a megbeszéléshez.

A továbbiakban először mindenki elolvasta a csoportok kérdéseit, majd végigvettük az egyes kérdéseket és mindenki szavazott arról, hogy az adott kérdéssel szívesen foglalkozna-e, érdekesnek találná-e a kérdés megválaszolását – természetesen a saját csoport kérdéseinél az érintett csoporttagok nem szavazhattak. A fennmaradó időben a legtöbb szavazatot kapott néhány kérdést válaszolták meg a csoportok egy újabb lapon- erre általában maradt elég idő.

A méhek világából

A méztermelő méh virágokat látogat, hogy ott nektárt és pollent gyűjtsön. A nektárból mézet készít, a pollen fehérjegazdag táplálék. A pollent általában erre a feladatra specializálódott méhek gyűjtik. A méhek előállítanak viaszt is, a viaszból pedig lépet „építenek".



www.hobos.de

A feladat:

Fogalmazz meg és jegyezz fel lehetőleg minél több olyan kérdést a szituációval kapcsolatban, amelyek megválaszolhatók a megadott információk segítségével.

Információk:

- A méhviasz fontos kozmetikai és gyógyászati alapanyag, 1 mg viasz előállításához 1500 méh teljes viasztermelésére van szükség. Egy méh körülbelül 10 napig tud viaszt termelni 35 napos élete során. (Forrás: Internet)
- Egy méh tömege körülbelül 70 mg és minden kirepülésekor legfeljebb 40 mg nektáralapanyagot tud hazavinni. (Forrás: www.hobos.de)
- Egy méhcsalád évente 20-30 kg virágport gyűjt. Egy pollengyűjtő méh rendszerint körülbelül 15 mg virágport visz haza. A méhcsalád teljes pollenkészletének begyűjtéséhez egy és két millió közötti gyűjtőrepülésre van szükség. (Forrás: www.hobos.de)
- Egy méhcsaládtól évente körülbelül 30-40 kg méz „vehető el", a többi mézre a családnak van szüksége saját ellátására. A méz előállításához a méheknek kétszeres mennyiségű nektárt kell a méhkasba vinniük. (Forrás: Internet)

1. ábra: A méhek életével kapcsolatos feladatlap

Silver (1994) besorolása alapján ezzel a módszerrel „presolution problem posing“ történt, ami gyakorlatilag nemcsak probléma megfogalmazást, hanem egyfajta előzetes megoldást is jelent, hiszen a feladat szerint a feladat megoldható kellett, hogy legyen a megadott adatok alapján. Stoyanova és Ellerton (1996) kategóriái alapján „semi-structured problem posing“-ról van szó, ugyanis a kérdéseket nem szabadon, hanem egy megadott szituációhoz kellett megfogalmazni.

A nyolcadikos négy tanulócsoport közül kettőben egy korábbi órán egy másik szituációval kapcsolatban, de hasonló feladatot kaptak a tanulók. Az óra menete gyakorlatilag ugyanaz volt, mint a „méhes” lap esetében.

Miért a méhek?

A méhekkel minden gyerek igen hamar találkozik, a virágokon szorgoskodó állatok látványa, és méztermelő képességük gyakran felkelti érdeklődésüket. A méhek élete izgalmas, különös világ és a méz, a méhviasz, a virágpor, a propolisz vagy akár a méhpempő révén a mindennapi emberi élet számára is jelentős. Az sem kivételes esemény, ha valakinek a családjában akad méhész. Az én családomban ketten is foglalkoztak ezzel évtizedeken keresztül, így közvetlen tapasztalatokat is tudtam szerezni.

A feladatlap témájának választásához az előbbieken kívül nyilván hozzájárult az is, hogy már korábban is foglalkoztam méhekkel kapcsolatba hozható dolgok, például a hatszögekből „álló lép” esetében feltehető matematikai tartalmú problémákkal valamint méhek életével kapcsolatos valós adatok, megfigyelések iskolai alkalmazásának kérdéseivel (Ambrus G. 1994, 1996, 1997, Ambrus, G., Wagner, & Tautz, 2014).

A méhek élete igen gazdag téma, sokféle adat gyűjthető és sokféle kérdés merülhet fel. Bár nem kimondottan divatos témáról van szó, sokakat érdekel (Gerstner, S., Heyne, T., Renninger, L. 2012) ahogy ezt a felmérések során tanulók és hallgatók körében később is tapasztaltam.

Értékelési módszer

A tanulói kérdések értékelésénél, mind a német, mind a magyar anyagban a kérdések jellege állt a középpontban. Silver és Cai (1996) elemzésük során az „arithmetic problem posing" azaz számolási feladatokkal kapcsolatos kérdésfeltevéssel kapcsolatban megkülönböztetnek nem matematikai jellegű és megoldható illetve nem megoldható matematikai kérdéseket. A megoldható kérdéseket végül matematikai és nyelvi komplexitásuk alapján további kategóriákba osztják. A vizsgálathoz ezt az elemzési sémát vettük alapul, de a megadott valós szituáció nyitottságából adódó különféle jellegű kérdések miatt a nyelvi komplexitás alapján történő elemzéstől eltekintettünk.

A kategóriarendszerünkben két fő kategóriát különítettünk el, amelyeket további alkategóriákra bontottunk:

- *nem matematikai kérdés:* valamely, a szövegben megadott számra (T_Z), vagy valamilyen nem számmal megadott információra (T_T) irányul, esetleg egyéb jellegű kérdés (A),
- *matematikai kérdés:* egyetlen számolási lépéssel megoldható (M_1), csak több számolási lépéssel oldható meg (M_2), vagy teljesen valóságtól idegen (M_{RF}), illetve lehet nem megválaszolható (M_{NB}), vagy egyéb jellegű kérdés (M_A).

Az alábbi táblázatban olyan példákkal illusztrálom az egyes kategóriákat, amelyek a felmérésben résztvevő tanulók munkáiból származnak, az osztályt a zárójelben írt szám jelzi:

T_Z	Hány pollenrepülés szükséges, hogy összegyűjtsék a pollenkészletet? (8)
T_T	Miért fontos a méhviasz? (6)
T_A	Miért olyan könnyűek a méhek? (6)

M_1	Mennyit nyom egy gyűjtőméh visszatérésekor a kaptárba? (6)
M_2	Egy méhcsapat tömege 1830g, egy teljesen megrakott méh tömege 110 mg, a többi méh összesen 752 g. Hány méhről van szó? (8)

$\mathbf{M_{RF}}$	Egy méhcsalád (4 tagú) hány mg viaszt termel, és hány kg mézet illetve hány kg pollent gyűjt 2 év alatt, ha a négy családtag a két év alatt mindig ugyanaz? (6)
$\mathbf{M_{NB}}$	Hány méh szükséges 1 kg méz előállításához? (8)
$\mathbf{M_A}$	Milyen hosszú ideig él két méh? (6)

Az előbbi kategóriák figyelembevételével a kreativitásra, annak mértékére ebben a felmérésben például egyrészt az összetettebb (M2) feladatok, illetve egyes M_A feladatok alapján lehet az adott csoportokban következtetni (vö. Getzels & Jackson 1962, idézi Silver, 1997, 76).

Eredmények

A felmérésen összesen 146 budapesti tanuló vett részt, általános iskolákból és 8 osztályos középiskolákból. Az eredmények összesített eredményét az alábbi, *1. táblázat* mutatja (a részletes eredmények a szerzőnél érhetők el). A számok az egyes típusokban adott kérdések számát jelölik.

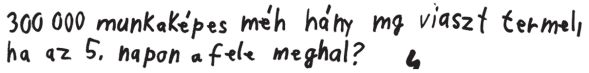
évfolyam	Tz	Tt	T_A	M1	M2	RF	NB	M_A
6. 70 tanuló	100	22	21	5	1	0	0	2
8. 76 tanuló	63	19	10	33	7	3	4	3

1. táblázat: A tanulói felmérés eredményei

Az eredmények alapján látható, hogy a vizsgált két évfolyamon egyaránt gyakoriak voltak a kapott információs anyagra direkten rákérdező kérdések, de különösen a 6. osztályokban.

A nyolcadik osztályokban jelentős mértékben nőtt a matematikai tartalmú kérdések száma, erős eltolódással az egyszerű, M1 kérdések felé. A kérdésfeltevés jellegénél nemcsak a különböző évfolyamok, de az egyes iskolák, sőt az egyes csoportok esetében is nagy különbségek mutatkoztak több esetben.

A matematikai kérdések gyakran igen „iskolásak“ voltak illetve előfordultak tanulótársaknak szóló fejtörő jellegű feladatok is. Nyolcadik osztályosoktól származik az alábbi kérdés – (számok az ábrákon a korábban említett szavazatok mennyiségét mutatják abban a tanulócsoportban/osztályban, ahol feltették.):



2. ábra: 8. osztályos tanulók „fejtörő” típusú feladata

Az adatok alapján azt is meg lehetett vizsgálni a 8. osztályosok körében, hogy hogyan alakul a kérdések összetétele aszerint, hogy először találkoztak ilyen – kérdések megfogalmazását kérő - feladattal, vagy egy korábbi órán egy másik témában már kaptak hasonló feladatot. A számok az egyes típusokban adott kérdések számát jelölik.

évfolyam	**Tz**	**Tt**	**T_A**	**M1**	**M2**	**RF**	**NB**	**M_A**
76 tanuló	63	19	10	33	7	3	4	3
közülük az 1. órában kapta:								
29	36	9	3	6				
18	22	9	3	6		1	1	1
közülük az 1. órában kapta:								
29	1		1	10	2	2	1	1
18	4	1	3	11	5		2	1

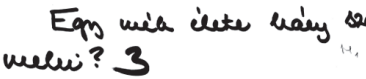
2.táblázat: a nyolcadikosok feladatainak részletesebb vizsgálata

A táblázatból látszik, hogy a vizsgált csoportokban a tapasztalattal már rendelkezők esetében egyrészt valamivel gazdagabb lett a készített feladatok jellege, másrészt általában a kérdések száma, ezen belül a szövegre, számra kérdező feladatok száma jelentősen csökkent, a matematikai tartalmú kérdéseké viszont növekedett.

Értékelés, kitekintés

Különösen feltűnő a szöveges megértésre vonatkozó kérdések nagy száma, főleg a hatodik osztályok esetében. Ez helyenként ezen az évfolyamon párosult egyfajta versengéssel is, hogy minél több kérdés fogalmazódjon meg – noha ez nem volt feladat. Mivel náluk nem volt „kétféle" felmérés, mint a nyolcadikosok esetében, így arról nincs információ, hogy vajon ennél a korosztálynál is jelentősebb változás lett volna ilyen esetben a feladatok jellegénél.

A matematikai kérdések esetében mindkét korosztálynál inkább az egyszerű, egy lépésben- esetleg közben szükséges átváltással-megoldható feladatok domináltak. A szöveges feladatok között inkább a számokkal való „játék" szerepelt, például:



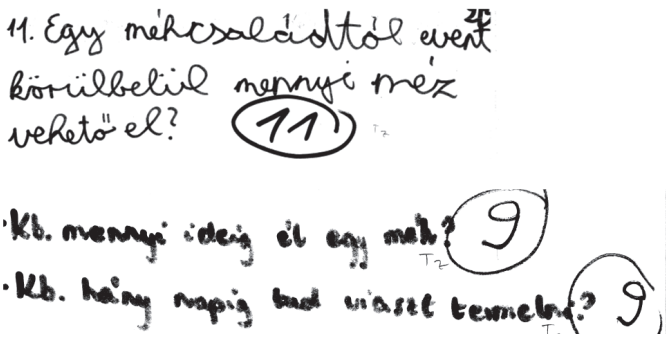
3. ábra: 8. osztályos tanulók kérdése

Kevésbé jelentek meg az úgynevezett beöltöztetett feladatok, mint például:

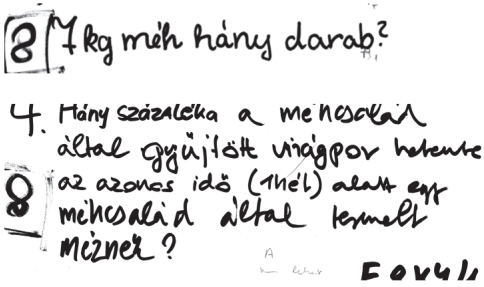
4. ábra: 6. osztályos tanulók kérdése

A megbeszélés során az érdekesnek bizonyultak a hatodik osztályokban leginkább az információkra irányuló közvetlen kérdések, míg a nyolcadik osztályokban inkább a matematikai feladatok, noha segítségükkel gyakorlatilag semmilyen érdekesebb, újabb összefüggés nem derült ki a méhekkel kapcsolatban.

Az osztályokban „megszavazott" legérdekesebb kérdések a 5. és 6. ábrákon láthatóak.

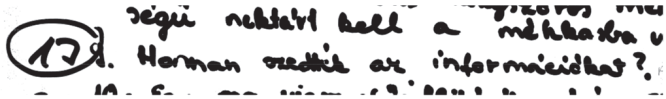


5. ábra: A legérdekesebbnek bizonyult kérdések a hatodik osztályokban



6. ábra: A legérdekesebbnek bizonyult kérdések a nyolcadik osztályokban

Az egyik nyolcadikos általános iskolás osztályban azonban a következő, az információ forrására irányuló kérdés „győzött“:



7. ábra: A „győztes” kérdés az egyik 8. osztályban

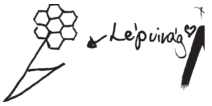
A valós szituáció vizsgálata szempontjából külön is érdekesek az adatokból nem megválaszolható kérdések (M_{NB}), ugyanis ezekhez további információ gyűjtésére, illetve feltevések megfogalmazására lehet szükség és így a modellezési feladatok irányába mutatnak. A hatodik osztályosoknál ilyen típusú kérdés nem volt, nyolcadik osztályosok tették fel például a következő kérdéseket:

„Hány méhre van szükség ahhoz, hogy az éves 25 kg-os mennyiséget begyűjtsék?" vagy „Hány méh van egy családban?"

Az M_2 kérdések alacsony száma, illetve az egyéb kategóriában megjelenő kérdések jellege első közelítésben arra utal, hogy a feladat kapcsán a vizsgált tanulók esetében kevesebb kimondottan kreatívnak mondható feladat/kérdés született, inkább a tesztek kapcsán (ld. szövegértés) előforduló vagy matematikaórán általában szereplő feladattípusok használatával oldották meg a feladatot. Nyilvánvalóan belejátszik ebbe az eredménybe az rendelkezésre álló idő szűkössége is, de azt nem vizsgáltuk, hogy hosszabb idő alatt mire jutottak volna. A tanórai csoportmunkák megfigyelésével úgy tűnt, hogy le tudták írni, ami első közelítésben eszükbe jutott, és a feltehető, hogy ha hosszabb idejük lett volna, akkor se változott volna a feladatok „összetétele", legfeljebb a száma.

Két csoportban rajzzal is kísérték munkájukat, ahogy tapasztaltam ez tetszésnyilvánítás volt inkább.

8. ábra: Egy hatodik osztályos általános iskolás csoportban készült rajz



9. ábra: 8. osztályos gimnazista csoportban készült rajz

A tanárok általában érdeklődve fogadták a felmérést, többen elmondták kérdésemre, hogy még egyáltalán nem foglalkoztak nyitott feladatokkal. Néhányan jelezték az óra után, hogy a következő órán még beszélnek a feladatlapról és a feladatról az osztályukkal, – ezzel kapcsolatban egy érdekes visszajelzést is kaptam: az egyik 6. osztályos csoport tanulói a tanár kérdésére elmondták, hogy tetszett nekik a téma, a feladatlap, de az nem, hogy „olyan kevés matematika volt benne" (!). Érdeklődő, jó képességű gyerekek de az így elsőre fel sem merült bennük, hogy a matematikát éppen nekik lehetett volna „belevinni" a témába kérdéseikkel.

Felmérés és eredmények tanárszakos hallgatók körében

Az eredmények alapján kíváncsi voltam, hogy módszertant már tanult illetve végzős tanárszakos hallgatóim (két szemináriumi csoport) milyen kérdéseket tesznek fel a szituációval kapcsolatban - két csoportban kapták meg a feladatlapot. Ők is 3-4 fős csoportokban dolgozhattak és nekik is körülbelül 15 perc állt rendelkezésükre, hasonló rövid bevezetés után a feladatlappal kapcsolatban, mint a tanulók esetében.

A rövid felmérésre, – aminek tapasztalataival utána az órán tovább dolgoztunk még többféle szempontból, – szakmódszertani szemináriumok alkalmával került sor. Az alábbi összefoglaló táblázat (*3. táblázat*) hallgatók eredményeit mutatja. A számok az egyes típusokban adott kérdések számát jelölik:

	Tz	**Tt**	**T_A**	**M1**	**M2**	**RF**	**NB**	**M_A**
16 fő, 5 kisebb csoportban	4	7	2	14	7	1	4	1

3. táblázat: A hallgatók eredményei

A tanulói (1. Táblázat) és hallgatói (3. Táblázat) táblázatot összehasonlítva szembeötlik, hogy - valamennyi tapasztalattal rendelkezve valóságközeli szituációkkal kapcsolatban - továbbra is szerepelnek információra rákérdező kérdések, viszont a matematikai tartalmú kérdések aránya nagyobb és ezen belül a többlépéses (M2) kérdéseké is. Az is érdekes, hogy a hallgatók szintén tettek fel az adatokból nem megválaszolható kérdéseket is, mégpedig aránylag sokat:

– Hány méh van egy családban? (2 csoportban is megjelent)
– Hány kg egy méhkaptár?
– Van-e olyan méh, amelyik soha nem lát virágot életében?

Kérdésemre a hallgatók elmondták, hogy mivel nem volt megadva, milyen „jellegű" kérdést kell feltenni, általában arra törekedtek, hogy többféle „típusú" kérdést írjanak és azt is, hogy a témát érdekesnek találták.

Az egyik szemináriumi csoportban kisebb vita alakult ki, hogy kiknek adnának fel ilyen feladatot – mert a többség feladna ilyen feladatot – inkább a „jobbaknak" vagy bárkinek. Végül a többség az utóbbi mellett döntött. Néhányan a féléves záróreflexióban is megemlítették a feladat hasznosíthatóságát és egy hallgató utóbb jelezte, hogy elolvasta az ajánlott cikkemet is (Ambrus, G. 2014).

A másik, végzős egyetemi csoport tagjai úgy vélték, hogy ha „szebbek lennének a képek azokra is lehetne rákérdezni", például arányossági feladatokra gondolnának elsősorban- végül azonban nem fogalmaztak meg ilyeneket. Ők, elmondásuk szerint élvezték a feladatot, de úgy gondolták, hogy egyrészt az információk szövegezése túl bonyolult lehet a diákoknak, ezért meggondolnák erősen milyen tanulócsoportban dolgoznának vele, másrészt arra jutottak, hogy a gyerekek többségét várhatóan nemigen érdekelné a téma. Meglepődtek, amikor elmondtam nekik, hogy a magyar gyerekek általában érdeklődve fogadták a témát és több osztályban még szívesen beszélgettek volna tovább a méhekről.

Összefoglalás

A méhek életével kapcsolatos témát a diákok és a hallgatók általában érdekesnek találták, az órai munka, a tanulókkal folytatott óravégi beszélgetések, visszajelzések erre utaltak. A 6. és 8. osztályos tanulók által feltett kérdések annak ellenére, hogy a felmérésre matematika órán került sor, szövegértési jellegűek voltak többségükben. Érdekes módon azonban a nyolcadikosoknál, miután már találkoztak hasonló feladattal, megváltozott egyrészt a feladatok száma, másrészt a számítási feladatok javára a feladatok jellege is. Úgy tűnik, tapasztalatot szerezve ilyen típusú feladattal már nem sok kérdést, hanem inkább tényleges feladatokat akartak készíteni. *Érdekes kérdés, hogy vajon ez a változás más korosztályok esetében is megjelenik-e ilyen feladatoknál.*

A feladatok jellege, akár szöveges/számos információra kérdezett, akár számítást igénylő volt, inkább megfelelt a szokásos, órákon, felméréseknél kapott feladatoknak, ami várható volt. A számításos

feladatoknál dominált az egyszerű kérdésfeltevés (M1 feladatok). Nyilvánvalóan az összetettebb (M2) kérdések megfogalmazásához már az adatok és a közöttük levő kapcsolat jobb átlátása is szükséges, ezért ilyenek idősebb korosztályoknál jobban várhatók- ennek vizsgálata is érdekes további kérdés és az említett német-magyar kutatásban még ki is térünk rá.

A hallgatók nagyobb számban írtak összetettebb feladatokat, ami várható volt. Érdekes módon többen a feladat nyitottságára reagálva néhányan pontosító feltételt fogalmaztak meg: sokféle jellegű kérdés feltevése legyen a cél és ezért nem matematikai targyú kérdéseket is írtak, amire nem számítottam. Ugyancsak megfigyelhető, hogy többféle témakört is igyekeztek érinteni, illetve egyesek nemcsak a szöveg, de az ábrák (mint információk) felhasználására is gondoltak. Ez nyilvánvalóan betudható annak, hogy korábban már dolgoztak különböző valós szituáción alapuló feladatokkal.

A felmérés alapján többféle kérdés felmerül, ezek egy része az említett kutatásban még közelebbi vizsgálatra kerül. Azonban már ebből az anyagból is látszik, hogy előzetes tapasztalatokkal változik a feladatvégzők hozzáállása, színesebbé, átgondoltabbá válik kérdésfeltevésük, ami feltétlenül arra utal, hogy nemcsak van tennivaló ezen a téren, de esetleges fejlesztés már rövid távon is látható eredményeket hozhat.

Literatur

Ambrus, G. & Fritzlar, T. (2017). Fragen stellen zu realitätsbezogenen Situationen im Mathe-matikunterricht – erste Ergebnisse einer Untersuchung unter ungarischen und deutschen Lernenden, *Beiträge zum Mathematikunterricht,* Potsdam.

Ambrus, G. & Wagner, A. & Tautz, J. (2014) A méhek csodálatos élete az alsó tagozaton – (nem csak) matematika órákra. *Gyermeknevelés* online folyóirat, 2014/2. http://gyermekneveles.tok.elte.hu/4_szam/pub/ambrus_wagner_tautz.html

Ambrus, G. (1994a) Lefedések hatszögtáblán, *Matematikatanárképzés, matematikatanár-továbbképzés,* 1994/2, 93-105.

Ambrus, G. (1994b). Lefedések hatszögtáblán – egy meglepő eredmény, *A Matematika Tanítása,* 1994/4, 6-9.

Ambrus, G. (1996). Újabb eredmények hatszögtáblán, *A Matematika Tanítása,* 1996 /1, 14-21

Ambrus, G. (1997). Belegung von Sechsecktafeln mit Sechseckstreifen, *Praxis der Mathematik,* Aulis Verlag, Deubner & Co KG, Köln, 1997/1, 26-28.

Ambrus, G. (1997). Belegungsprobleme auf Sechsecktafeln, *Beiträge zum Mathematikunterricht,* Verlag Franzbecker, 56-60.

Arikan, E. E., & Unal, H. (2015). An investigation of eighth grade students' problem posing skills (Turkey sample). IJRES, 1(1), 23–30.

Bonotto, C. (2013). Artifacts as sources for problem-posing activities. ESM, 83(1), 37–55.

Brown, S. I., & Walter, M. I. (Eds.). (1993). *Problem posing: Reflections and applications.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Christou, C., & Mousoulides, N., & Pittalis, M., & Pitta-Pantazi, D., & Sriraman, B. (2005). An empirical taxonomy of problem posing processes. ZDM, 37(3), 149–158.

Csíkszentmihályi, M. (2008). *Kreativitás,* Akadémiai Kiadó, Budapest.

Gerstner, S. & Heyne, T. & Renninger, L. (2012): Live aus dem Bienenstock. Multimedialer Biologieunterricht mit echten Bienen. Praxis Schule 4, 11-17.

Hansen, R., & Hana, G. M. (2015). Problem Posing from a Modelling Perspective. In F. M. Singer, N. F. Ellerton, & J. Cai (Eds.), *Mathematical problem posing. From research to effective practice* (pp. 35–46). New York: Springer.

Hollenstein, A. & Eggenberg, F. (1998). *Materialien für Offene Situationen im Mathematik-unterricht,* Orell Füssli Verlag, Zürich.

Katzenbach, M. (1996): SchülerInnen machen Matheaufgaben selbst. *mathematik lehren, 74,* 46–50.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 19–28.

Silver, E.A. (1997): Fostering Creativity through Instruction Rich

in Mathematical Problem Solving and Problem Posing, *ZDM,* 97/3, 75-80.

Silver, E. A., & Cai, J. (2005). Assessing students' mathematical problem posing. *Teaching Children Mathematics, 12*(3), 129–135.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An Analysis of Arithmetic Problem Posing by Middle School Children. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(5), 521–539.

Singer, F. M., & Ellerton, N. F., & Cai, J. (Eds.). (2015). *Mathematical problem posing: From research to effective practice.* New York: Springer.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A Framework for Research into Students' Problem Posing in School Mathematics. In MERGA (Ed.), *Technology in Mathematics Education. Proceedings of the 19th annual conference of MERGA June 30-July 3,* 1996, 518–525. Melbourne: Deakin University Press.

Varga, T. (1987). Post - "New Math" Since 1963: Its Implementation as a Historical Process *Development in School Mathematics Education Around the World.* ed. Izaak Wirszup, Chicago, 1987 237-249.

Way, J. (2013). Problem Solving: Opening up Problems. https://nrich.maths.org/2471/index

Váci Mihály:

Jegenye-fényben

A búzafények áramló mennyében
szinte dúdolva jött a gyalogút
ezerfelől - és vezette kézen
a tarisznyába botló kisfiúk
s a pipacskendős kislányok hadát.

Jöttek a gyerekek, s gyíkot keresve
lesték, hol remeg az út menti fű,
s ha csirkéit sírva hívta a fürj:
a suhogó búzában törve, messze
kószáltak - odahagyva az utat.

Fejük felett összecsapott a fénytelt
kalászok íve - ám egyik se félt,
hogy eltéved, mert a fészekhez-térdelt
gyerek is, ha felvetette fejét,
minden tájról látta a jegenyét,

amit zöld gyertyaként még nyolcvan éve
tűztek le az iskola tövinél,
hogy örök-érzékeny szelekben égve
hívja azt, akit öröme sző fénybe,
vagy gondja barázdáin mendegél.

S a jegenye - zöld máglya - égre lobbant
a pusztában:- s hol tornyok nincsenek,
harang se zeng, hirdeti roppant
hitét, kiáltva, fényben, viharokban:
- Gyermekek, népek, erre jöjjetek!

Százezer külön mozdulású vágy van
benne- de minden ággal egy irányba,
csak fel!- a fény egébe tör zokogva,
hogy lángra gyújtsa, hívja, felemelje
azt, ki fáradtan hullna a homokra.

Vad, tragikus fohászú lélek:- éber
ezüst tükröket a Mindenségbe tart,
és felelősen minden levelével
figyel, jelez hajnalt, távol vihart.

Csak vándormadár száll rá néha: éjjel
hulló csillag reszket meg levelén:
hozzá a por szürke leple nem ér fel,
sem a csalán s a gazok tövise.
Csak vihar töri s villámmal a fény.

Ilyen kívántam lenni én is, ott, a
homokba szúrt nyárfa:- a tanító,
ki fénybe tör, ragyogó hit a lombja,
irány azoknak, jel és biztató,
kik jönnek barázdákban botladozva.

Árokszállási Eszter

Hogyan segíthetünk az átlagos képességű, és a matematikában tehetséges tanulóknak egyszerre?

Bevezetés

Ambrus András 2012-ben fogadott doktorandusz hallgatójának. Hálás vagyok ezért, hiszen már hat doktorandusz hallgatóval foglalkozott azokban az időkben az Eötvös Loránd Tudományegyetem Matematika Módszertani Tanszékén. 2011-ben vettek fel a Debreceni Egyetem Matematika- és Informatika Doktori Iskola levelező Didaktikai (szakmódszertani) szakára. 51 évesen már sok tapasztalatom volt a tanításban, de a módszertani kutatás, amibe belevágtam mást kívánt. A kutatási hipotézist, amit kigondolt az ember, a gyakorlatban tesztelni kellett, a teszt alapján módosítani, a munka minden részletét dokumentálni kellett, majd a tapasztalatokat magyar és angol nyelvű konferenciákon bemutatni, cikkeket írni, … felsorolhatatlanul sok kihívásnak tűnt mindez. Ambrus András támogatásával azonban el tudtam kezdeni a munkát, és a kutatás során végig, hasznos tanácsaival segített.

Szeretném most megosztani, kutatásaim egy-egy részletét. Melyik tanítási elvem erősödött meg, és melyiket voltam kénytelen megváltoztatni? Milyen tapasztalatokat gyűjtöttem?

A kezdetek

Igaz-e „Ott követed el a hibát, hogy azt szeretnéd, hogy minden gyerek szeme csillogjon!”?

Az Arany Dániel Matematika verseny országos döntőjében szereplő tanulóink eredményeire vártunk, még az 1990-es években, amikor egy, a matematika tanárok közötti kötetlen beszélgetésben elhangzott a fenti feddés. Ezután a kolléga azt javasolta, hogy a legjobbakkal foglalkozzak, és a többi tanuló majd követi az elmondottakat, ahogyan tudja. Ekkor érhető el ugyanis a legjobb eredmény, a legjobb képességű tanulókkal.

A beszélgetés elgondolkodtatott. Igen, választanunk kell, hogy mit szeretnénk elérni, és merre haladunk. Megválaszthatjuk a célt úgy, hogy a legtehetségesebb tanulókkal foglalkozunk. Ilyenkor egy csoportból legfeljebb 3-4 tanulóval dolgozunk érdemben. A többiek lemaradnak. Külön órákon, korrepetáláson bepótolhatnak valamit.

Dönthetünk úgy is, hogy az átlagos képességű tanulókkal foglalkozunk, ők vannak többen. A jobbaknak külön feladatot adunk, differenciálunk. A tehetséges tanulóknak szakkört tartunk. A leggyengébbeket korrepetáljuk. Ilyenkor a legtehetségesebb tanulók a tanórán nem érdeklődnek eléggé. Úgy érezhetik, hogy a közös feladatok nem jelentenek számukra kihívást.

A legtehetségesebb tanulókat külön iskolában taníthatjuk. A matematikai tananyag belső szerkezetét, titkait legjobban ismerő tanárok segítségével, a lehető legmagasabb szintre emelhetjük a kiválasztott tanulók matematikai tudását.

Úgy döntöttem, hogy a rám bízott tanulókat segítem, felelős vagyok mindegyikükért, és mindenkit szeretnék saját magához képest fejleszteni. A hangsúly a segítő, támogató hozzáálláson volt, és van ma is.

Először úgy kezdtem, ahogyan én is láttam. Frontális osztály munka, leadtam az anyagot, de igyekeztem az egyszerűbbtől a nehezebb felé haladni. Válaszoltam a feltett kérdésekre. Azoknak, akik nem értették a tananyagot korrepetálásokat tartottam. Fel kellett tennem egy kérdést az első évek után: Hogyan lehet az, hogy az órákat is, a korrepetálásokat is én tartom, mégis a korrepetálásokon a gyerekek gyorsabban megértik a tananyagot?

A korrepetálásokon, amelyek akkoriban kötelezőek voltak a tanulóknak, nemcsak kérdeztek a tanulók, hanem konkrétan megfogalmazhatták mit nem értenek, a táblánál hangosan kimondhatták,

bemutathatták, hogy mit tudnak és mit nem. Kevesebben voltunk, mint a rendes tanítási órán. Több szemléltető ábrát rajzoltam. Lassabban haladtunk. Saját szavainkkal is elmondtuk a tanultakat. Ettől kezdve a rendes tanítási órákon is másként kezdtem dolgozni. Fokozatosan a gyerekekre figyelve alakítottam a módszereket. Az egyéni, pár és csoport munkát is alkalmaztam. A csoport munkát, 3-4 fős kiscsoportokban inkább csak egy-egy rész összefoglalásakor láttam célszerűnek.

Az iskolai háttér

Tudnunk kell ehhez, hogy a mi iskolánk, a Paksi Vak Bottyán Gimnázium, egy kis létszámú gimnázium. Évente 390-410 nappali tagozatos tanulónk van. (Felnőtt oktatással is foglalkozunk, de erre most nem térek ki). Egy évfolyamon, párhuzamosan egy 6 évfolyamos és két 4 évfolyamos gimnáziumi osztályunk van. A matematikát csoportbontásban tanítjuk egy tehetséges és egy kevésbé tehetséges 12-16 fős csoportban. Így sem tudunk azonban homogén csoportokat kialakítani. Heterogén csoportokban kell tanítanunk, itt alkalmazni egy fejlesztő, segítő tanítási stratégiát.

Az elméleti háttér keresése

„Emberlétünkből" fakadó lehetőségek, és korlátok

„A modern képalkotó eljárások segítségével (fMRI) M. O'Boyle a Texas Tech Univerity munkatársa azt vette észre, hogy problémamegoldás közben a matematikából tehetséges tanuló, a 13 éves S. M. agyterületeinek többszörösét, kb. ötszörösét-hatszorosát használja az átlagos képességű tanulókhoz viszonyítva [1]". Miután ezt megtudtuk juthatnánk arra a következtetésre, hogy nincs mit tenni. „Emberlétünk" megszabja, hogy ki miben tehetséges, és mire képes. Gondolkodhatunk azonban úgy is, hogy olyan tanítási stratégiát választunk, amelynek segítségével közelebb juthatnak

az átlagos képességű tanulók is ahhoz, hogy az agyterületeiknek többszörösét használják a feladatok megoldása során, mint szokták.

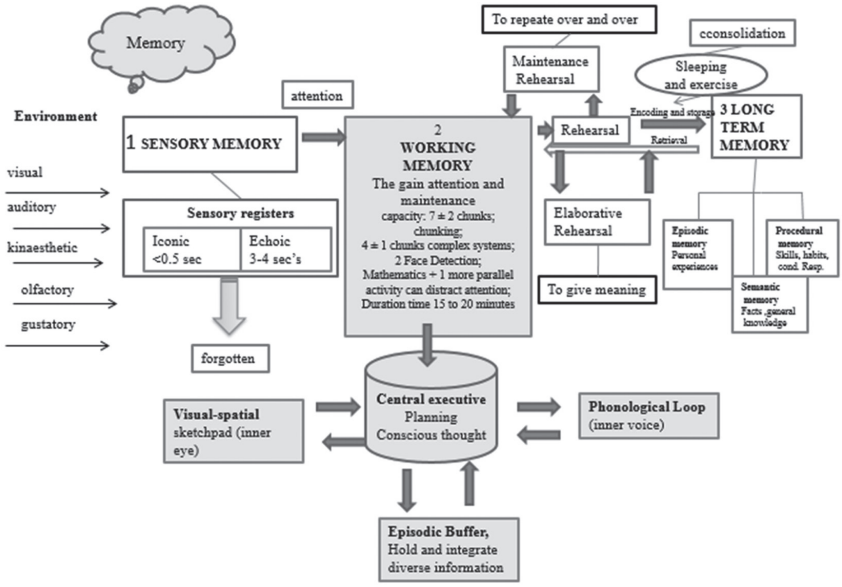
Az agyunkkal kompatibilis tanítási-tanulási módszer

E. Jensen, neuropszichológus (1998) az agyunkkal kompatibilis tanítási-tanulási módszert javasolja [3]. A kutatások azt mutatják, hogy minden agy egyedülálló. Ha a tanítás-tanulás során többszörös intelligenciákat (H. Gardner) [4] is használunk eredményesebbek lehetünk, mivel a tanulás 98-99%-a tudatalatti (E. Jensen) [3]. A körülöttünk lévő gazdag környezetből adódik, amelyet érzékszerveinkkel felfogunk, és azokra reagálunk.

A munkamemória és a humán kognitív architektúra

Készítettem egy ábrát Atkinson & Siffrin (1968) és Baddeley & Hitch, (1974) kutatásai alapján, amely elménk kognitív architektúráját szemlélteti. Figyelembe vettem még Kirschner, Sweller és Clark (2006) memória modelljét. Baddeley munka memória modelljét középen külön kiemeltem (1. ábra) [5]. A munkamemória "azt a képességünket jelenti, hogy emlékezzünk arra, amit éppen észleltünk és annak jegyében gondolkodunk, amit már tudunk" (Martin, Carlson & Buskist, 2007) [1]. A munkamemória a tervezésben és a tudatos gondolkodásban fontos szerepet játszik, ezért a matematika tanítási-tanulási folyamatában nem hagyhatjuk figyelmen kívül tulajdonságait. A kapacitása rendkívül kicsi 7±2 alapegység (chunk), és az összetettebb egységekből (complex chunks) csupán 4±1 egység, a normálfelnőtt munkamemória esetében. Az újonnan feldolgozott információkat azonnali (kb. 10 perc) korrigálnunk kell, ha ez szükséges, mert különben túlságosan rögzülhet az első benyomás, és így nehezen javítható a későbbiekben [3]. Ugyanekkor, ha nincs ismétlés gyorsan el is felejtjük a tanultakat. „A központi végrehajtó (Central Executive) szerepe a versengő emléknyomok közötti döntést igénylő, tehát nem automati-

kus választás- a döntés szempontja pedig jellegzetesen az, hogy mi a személy pillanatnyi célja, feladata, illetve ennek érdekében milyen viselkedési sémát kell kiválasztani- és a másik két alrendszerben. (Téri-Vizuális egység, belső szem & Fonológiai hurok, belső fül) lévő információkkal megtámogatni" [7].



1. ábra Elménk kognitív architektúrája [5]

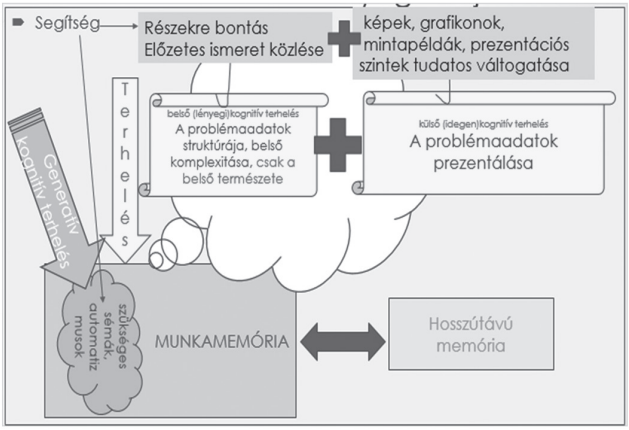
Kognitív terhelés elmélet

A matematika tananyag különösen nagy kognitív terhelést okoz a tanulóknak. A matematikai problémák megoldásakor a problémaadatok belső struktúrája, belső komplexitása, a matematika belső természetéből fakadóan bonyolult. Ez okozza a belső, lényegi, kognitív terhelést. Változtatni nem tudunk, de segítségképpen például a tananyagot részekre bonthatjuk,előzetes ismereteket nyújthatunk. Külső, idegen kognitív terhelésként jelenik meg a tananyag prezentálása, ábrák, képek, grafikonok, prezentációs szintek tudatos váltogatása, mintapéldák,... segíthetnek a tanulóknak a terhelést

csökkenteni, és teljesebb belső képet kialakítani. "A belső és külső kognitív terhelés additív. Ezek együtt határozzák meg a teljes (generatív) kognitív terhelést, amelyet a tananyag szab ki azáltal, hogy meg kell tanulni (J. Sweller) [10]". Említettük már, hogy a munkamemória kapacitása nagyon kicsi.A munkamemória szabad kapacitását az is csökkenti, hogy a problémák megoldásához szükséges sémáknak, és automatizmusoknak rendelkezésére kell állnia. (2. ábra)

Bruner féle reprezentációs szintek

J. Bruner három reprezentációs szintet különböztet meg, enaktív, ikonikus, szimbolikus (J. Bruner, 1966). Enaktív szinten az ismeretszerzés egy cél elérésének érdekében konkrét, tárgyi tevékenységek, cselekedetek manipulációk révén megy végbe. Ikonikus síkon az ismeretszerzés szemléletes képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik. Szimbolikus síkon az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével történik. Nemcsak a fiatalabb, hanem az „idősebb tanulóknál is hatékonyabbá tehető a tanulási folyamat, ha tudatosan változtatjuk a reprezentációs módokat, és így a reprezentációs módok izomorfiája is világossá válik (Ambrus, 2004) [2].



2. ábra Kognitív terheléselmélet és segítség a matematika tananyag elsajátításában [8]

Az első két kísérlet tanulságai
Nevezetes szorzatok tanítása (algebra)

2012 októberében, a nevezetes azonosságok témakörében végeztem egy kísérletet a 9.osztályos tanulókkal. 15-en vettek részt a kísérletben. A tantervben a 10 tanítási órára kiszabott tananyagot 20 órán keresztül tanultuk. A Teaching Mathematics and Computers Sciences című folyóiratban, 2014-ben, The use of different representations in teaching algebra, 9 th grade (14-15 years old), című cikk jelent meg, melyben részletesen írtam a kísérletről. Jelen írásban a tanulói és szülői véleményekből mutatok be néhányat, amelyek megerősítettek, illetve változtatásokra késztettek.

A tanulók véleménye a nevezetes azonosságok tanítása után

A tanulók hozzáállása az algebrához pozitívan változott:

D. Á.: tanulói noteszében így ír: „Eddig nem szerettem az algebrát, de most mindent megértettem, tetszettek az órák. A most tanult módszerekkel a nehéz feladatokat is meg tudom oldani."

A tanulók otthon is gyakoroltak:

K. K tanulói noteszében így ír: „Az órán még nem mentek annyira a feladatok, de otthon gyakoroltam, most már jobban megy."

A tanulók hozzáértése fokozatosan javult:

Sz. J tanulói noteszében így ír: „Az előző órán nem értettem a két tag köbét, de most már kapiskálom".

A tanulókat a tevékenységek önálló gondolkodásra ösztönözték: Sz. J. tanulói noteszében így ír: „A szöveges feladatok kissé nehéznek bizonyultak, de ha jobban átgondoljuk nem olyan veszélyes."

Azok a tanulók, akik könnyen léptek be a szimbólumok világába nem értették miért van szükség a különböző reprezentációs szintek tudatos váltogatására. H. Á. „Minek ez! Csak figyelni kell és kész!" Ők nehezebb feladatokat is kaptak, amelyekkel önállóan is megbirkóztak, de fel is állhattak, odamehettek segíteni társaiknak. A segítő attitűd kialakítására törekedtünk.

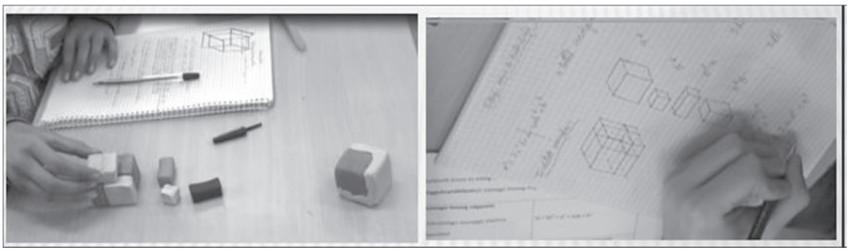
Nézzünk két szülői véleményt, amelyek közül az egyik rámutat

a tanulás érzelmi hátterére, és a másik a köztudatban jobban elterjedt véleményekhez igazodik. „Ha tudtam volna, hogy ilyen is lehet a matematika, akkor nem féltem volna annyira (iskolás koromban)."

„A matematika nem gyakorlati tantárgy inkább „fejmatek", ahhoz kell ragaszkodni."

Már egyetemista tanítványom írta (2015):

„A feladatokat és a leckéket is folytattam. Valahol kevesebb feladatot csináltam meg, de volt olyan is, hogy a példák alapján sikerült megérteni az adott anyagokat. És persze az emlékek is eszembe jutottak a Nevezetes Azonosságok c. leckénél. Nekem a 9. osztály volt az első évem a Tanárnő kezei alatt, és talán ezzel a „gyurmás módszerrel" sikerült megértenem, hogy mi hogyan alakul - ezért is neveztek el minket Gyurmás Matekosoknak, amit én a mai napig büszkén viselek." (3. ábra)



3. ábra A gyurmás módszer, az összeg köbe

A középiskolában tanultak az egyetemen is biztatást jelenthetnek a tanulóknak.

„Ezt is a Tanárnőtől tanultam, hogy nem szabad feladni (2016):

-Semmi baj, ha nem megy. Azért járunk az iskolába, hogy okosodjunk! - :)"

Szabályalkotó játékok, kongruenciák (számelmélet)

2012. év decemberében a 9. osztályos tanulók kapták karácsonyi ajándékként a következő, maradékosztással kapcsolatos, játékkal

színesített tanítási órákat. A tananyag belső szerkezetétől függő terhelést szerettük volna csökkenteni. A tanulók a játékhoz szükséges papír órákat elkészítették, és a játékban használhatták. (manipulatív tevékenység)

Átmegyünk Maradékországba. Ebben az országban maradékvárosok vannak, ahol csak a maradékok számítanak. Az órák is ennek megfelelően működnek. A Nulla maradékvárosban nem mérik az időt. Az Egyes maradékvárosban egy hosszú szalagot használnak, amelyen beosztások vannak: 0; 1; 2; 3; 4; …; m-1; m; …. Ha a szalag elfogyna, egyszerűen hozzáragasztanak még.

A Kettes maradékvárosban körlapot használnak, amelyen 0 és az 1-es jel van. Ezen forog az óra mutatója pozitív irányban. Hasonlóan a Hármas maradékvárosban az óra körlapjára a 0, az 1 és a 2-es jelet festették. Az m-es maradékvárosban a körlapra a 0, 1, 2, …, m-1 jeleket festették. Az órákat a király parancsára összehangolták. Az Egyes-, Kettes-, Hármas-, …, m-es maradékvárosban is, egy óra ugyanannyi ideig tart. Maradékország az EGÉSZEK birodalma. Itt minden városban csak egészekben mérik az időt. A nulla maradékvárosban élő király elküldi a Nagyutazót, hogy a különböző maradékvárosokban élő Bölcsektől (padtársak) tudjon meg minél többet a maradékvárosokban használatos szabályokról.

A tapasztalatok

A bevezető órán két tanuló (A. N; és P. L.) először egyesével számolta, állította be az óra mutatóját. Az óra végére jöttek rá, hogy elég a maradékokat nézni, illetve a különbséget, amikor a nagy számoknál már nem tudták például a=63347738 órát egyesével kiforgatni.

A Hármas maradékvárosban az eltelt 7óra kongruens az eltelt 16 órával, és az eltelt 5 óra kongruens az eltelt 23 órával, akkor az eltelt 7+5 óra kongruens lesz-e az eltelt 16+23 órával? Feladat megoldása előtt F.G. megkérdezte: „Mit kell itt összeadáson érteni?”

F. G. számára ismeretlen matematikai környezetbe került. Megbeszéltük, hogy az „óra” mutatóját még 5 illetve 23 egységgel el

kell forgatni, hozzá kell adni az „eltelt időt". Arra is kitértünk, hogy a kérdés nagyon jó, ha egy új matematikai környezetben szeretnénk egy matematikai műveletet bevezetni, akkor azt pontosan definiálni kell. Ezután az összeadás, kivonás, szorzás már nem jelentett gondot a tanulóknak.

A Hármas maradékvárosban az eltelt 11 óra kongruens az eltelt 2 órával, és az eltelt 9 óra az eltelt 6 órával, akkor az eltelt (11-9) óra kongruens-e a (2-6) órával? Miért? Ennél a feladatnál H. Á. és Sz J. megkérdezte, hogy: „A 11≡2 (mod 3) esetében lehetne –e úgy gondolkodni, hogy a 11-2=9 osztható hárommal, mert úgy könnyebb."

Megbeszéltük, hogy 3| 2-9 ⇔ 3|9-2, ezért 11≡2 (mod 3) ⇔ 2≡9 (mod 3). Általánosan is elmondható, hogy m|b-a (mod m) ⇔ m|a-b (mod m).

A Hármas maradékvárosban az eltelt 7 óra kongruens az eltelt 13 órával, akkor az eltelt (7:2) óra kongruens-e az eltelt (13:2) órával? Miért? Először mindenki elfogadta, hogy 7≡13 (mod 3), akkor (13:2)-(7:2)= (6:2)=3 és 3|3, tehát lehetséges.

Amikor azonban megkértem őket, hogy állítsák be az órán a (7:2) és a (13:2) értékeket rájöttek, hogy az egészek birodalmában vagyunk, nem lehetnek kongruensek a törtek.

Próbáljuk végig szabályainkat a Tizenkettes maradékvárosban! Kérdezzük meg a városban lakó bölcset (pad társunkat), hogy jól következtettünk-e? (Utána közös megbeszélés.)

Az összeadás, kivonás, hatványozás jól ment.

3≡15 (mod12) osztok 3-mal, akkor 1≡5 (mod 12) nem tűnt jónak, (H. Á. és D. Á.) 12-őt is elosztották 4-gyel. 15 -3 =12, 12|12; 5-2=3 (12/4) osztója a 3-nak indoklást adták.

A 12-es számlapú egy mutatós órát használták végig, és a füzetükbe is lerajzolták az órát 5-en (H.R.; Sz. J.; F. G.; K. K.; B.N.; P.L.), végig ellenőrizték, hogy ugyanott áll-e a mutató, a különbség vizsgálatára még nem tértek át. Azt mondták: „Így könnyebb elképzelni." További 10 tanuló, már úgy gondolkodott, hogy „a különbség számít."

Mit gondoltok: Vajon 3x≡6 (mod7) ekvivalens-e 3x≡6 (mod21)? A gyerekeknek az volt a véleménye (mindenki ezzel értett egyet), hogy „ugyanazok a megoldások jönnek ki tehát ekvivalensek."

Nagy utazónk az Ötös maradékvárosban az $x \equiv 3$, kongruenciát találta, a Tizenkettes maradékvárosban az $x \equiv 7$, kongruenciát találta. Vajon megtalálhatja-e a megfelelő közös x-eket, és melyik városban? A próbálgatás, és az egyenletrendszerek megoldásához hasonlító, szimultán kongruencia rendszer megoldását választották a tanulók. A definíció alkalmazásával történő magyarázat nem vált be. A gyerekek túl bonyolultnak találták. „Elvesztették a fonalat", és azt mondták, hogy nem értik.

A grafikus szemléltetésnél, amikor áttértünk a diofantikus egyenletekre:

Az $ax \equiv b \pmod m \Leftrightarrow ax+my=b$ megoldhatóságának szükséges és elégséges feltétele, hogy $(a;m)|b$, vizsgálata konkrét példákon bemutatva érthető volt a tanulóknak.

Az egyenesek ábrázolását a derékszögű koordináta rendszerben először be kellett mutatni.

M. I. észrevette, hogy „a $2x \equiv 1 \pmod 3 \Leftrightarrow 2x+3y=1$ diofantikus egyenlettel ekvivalens, sőt azt is felírhatnánk, hogy $3y \equiv 1 \pmod 2$. Hiszen az y tengelyt figyelve hasonlóan lépegetünk."

Megbeszéltük, hogy a lineáris kongruenciák megoldásai egész számok, a lineáris diofantikus egyenleteké egész számpárok. A lineáris kongruenciák megoldásainál, például itt $x \equiv 2 \pmod 3$ egy megoldásnak számít ($x=2$; 5; 8; …; $2+3k$; …k egész szám; a megoldásszám „véges". A lineáris diofantikus egyenleteknél v vektorral haladva az egyenesen végtelen sok megoldás van.

December 19.-én szombaton is volt tanítás, de mégis átcsúsztunk a téli szünet utánra (januárra) az utolsó összefoglaló órával (8 tanítási óra, és még egy összefoglaló óra). December 19-ére két tanuló (H. Á. és D.Á.) írt egy programot, amivel a szimultán kongruencia rendszer megoldásait ellenőriztük. A program elve a tanulók szerint: „$x \equiv t \pmod{m1}$ és $x \equiv s \pmod{m2}$, megadok egy olyan maximális számot, ameddig próbálgatok. Felírom az összes olyan számot, amelyik m1-gyel osztva t maradékot ad, és az összes olyat, ami m2-vel osztva s maradékot ad. Ha van a két halmaz között egyezés, akkor az a szám a megoldás a maximumig." B. N. röviden ismertette Diofantosz életét, és a sírján lévő szöveges feladatból egyenletrendezéssel megfejtettük, hogy Diofantosz 84 évet élt.

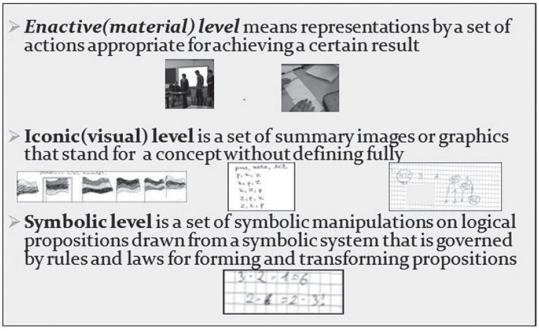
A Wolfram Alpha matematikai programot is használtuk a feladatok megoldása után ellenőrzésre, ha az interaktív táblás teremben volt óránk.

A játékot más osztályoknak is megmutattam. A tanulók szívesen játszották. A szabályok felismerésében az is segített, hogy a tanulók egymásnak, és az osztálynak is adhattak fel feladatokat.

A kétéves kísérlet rövid bemutatása, tanulságai (kombinatorikus gondolkodás fejlesztése)

Kombinatorikus gondolkodás fejlesztését választottam fő kutatási témának a gimnáziumban. A kísérletet 2014-16 között végeztük. A tanítványaim a Paksi Vak Bottyán Gimnázium hat osztályos gimnáziumában 13-14 évesek, 8. osztályosok voltak, amikor elkezdtük a kísérletet, és 15-16 évesek lettek, amikor a zárótesztet 10. osztályban megírták. Előtesztet, késleltetett tesztet, és utótesztet is írattunk. A korábbi évek kutatási tapasztalatait felhasználtuk, és kutatási hipotézisnek az alábbi tézist választottuk, amelyet a kutatás végén igazoltnak találtunk.

A különböző reprezentációk tudatos váltogatásával, folyamatos visszajelzést alkalmazva, fejleszthető a kombinatorikus gondolkodás (4. ábra).



4. ábra Illusztráció a három Bruner-féle szinthez a mi kísérletünkből [5]

A tanulók képességeiről

Egy tanuló kiváló a kombinatorikus gondolkodás területén. Önálló. Gyors gondolkodású (intuitív), de indokolni is tudja (racionális) az észrevételeit. Öten a csoportból több segítséget igényelnek, de nagyon jó a kombinatorikus gondolkodásuk. Észreveszik az azonos és a különböző feltételeket a feladatokban. Heten átlagos képességűek a kombinatorika területén. Ketten nehezen boldogulnak a kombinatorika feladatokkal. Szerintük, csak néhányszor találkoztak összeszámlálási feladatokkal.

Ezen kutatás részeként a 8. osztályos tanulók (15 fő) tudását egy elő teszttel mértük fel. Az elő teszt alapján a tanulók ismerték (13 fő) és alkalmazták (13 fő) a szisztematikus leszámolási módszert. Az egymás alá leírt eseteket kezdő betű szerint rendezték, és egyenként összeadták. 3 különböző dolog (színek, számok, csapatok, emberek, tárgyak) esetében még nem tévedtek. 4 elem esetében azonban már kimaradtak esetek az összeszámlálásoknál. Ez volt a kiindulási helyzet.

A hibák közül néhány, és azok javítása

A kombinatorikus összeszámlálás a következő definíció alapján egyszerűnek tűnik. "A kombinatorika a matematikának az az ága, amely a véges halmazok numerikus problémáival foglalkozik. Feladata, hogy az adott elemeket meghatározott szabály szerint csoportosítsa és a csoportok számát meghatározza." (V. Balogh et al., 1982) Azonban az összeszámlálás bármelyik fázisában véthetnek a tanulók hibát. Bemutatok néhány nálunk előforduló hibát, és azt, hogy hogyan orvosoltuk azokat *(6. ábra)*.

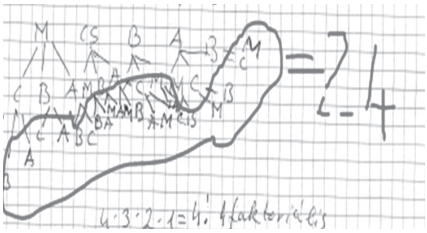
6. ábra Számoljuk össze!

Összeadás vagy szorzás, Kivonás vagy osztás

Leegyszerűsítő hiba (hozzáadom, elveszem)

Kiteszünk négy széket az osztályteremben az osztály elé sorban. (Megnézzük, hogy „hány különböző módon ülhet" le négy tanuló?) Hány különböző sorrend alakítható ki?

A hibás gondolat (K.A.):" Az első székre négyféleképpen, a másodikra háromféleképpen, a harmadikra kétféleképpen, a negyedikre egyféleképpen ülhetünk le. Mindegyiket az előzőhöz hozzáadom 4+3+2+1=10". A javításhoz használhatunk fagráfot, amely nemcsak az elemek közötti kapcsolatot mutathatja meg, hanem az elemek nagy száma miatt arra ösztönzi a tanulókat, hogy tömörítsenek, és szorozzák össze a számokat: 4·3·2·1 = 4! =24 (7. ábra).



7. ábra tömörítés

Hatan körben állunk. Hány különböző kör alakítható ki, ha egy kör akkor tekinthető az előzőtől eltérőnek, ha legalább az egyik szomszédod más, mint azelőtt?

Hibás gondolat (F.M.): „Ha mindenki eggyel odébb lép, akkor hatot kell lépni, hogy ugyanoda visszaérjek. Hatot elveszek". Mi ezt úgy javítottuk enaktív szinten, hogy sajátmagunk kipróbáltunk

8. ábra körtánc

néhány cserét (8. ábra).

A záróteszt (2016.06.08.) feladatai

A záróteszt első részében a hat alapeset jelent meg összekeverve, míg a második részben összetett egységek szerepeltek.

I. rész

1. Van négy betűnk az a, b, c, d. Hány különböző kétbetűs szót alkothatunk belőlük, ha a keletkező szavakban nem lehetnek azonos szavak?

2. Van négy betűnk A, A, B, B. Hányféle különböző módon rakhatjuk sorba ezeket, ha mind a négy betűt felhasználjuk?

3. Hányféle sorrendben ülhet le egymás mellé Anna, Béla, Cecília és Dávid?

4. Van négy számjegyünk a 3, 6, 7, 8. Hány különböző kétjegyű számot alkothatunk belőlük, ha a keletkező számokban lehetnek azonos számjegyek is?

5. Négy tanuló közül (Anna, Balázs, Csaba, Dóra) kettőt hányféle különböző módon választhatunk ki, ha a két fős csoportban a sorrend nem számít?

6. Négyféle színű golyó van egy kalapban arany, barna, citromsárga, piros. Mindegyikből legalább kettő. Belenyúlunk a kalapba és kiveszünk egyszerre kettőt. Belenézünk a markunkba, és lejegyezzük, hogy mit markoltunk ki. (Ilyenkor a golyók sorrendje nem számít.) Hányféle lehetőség van?

II. rész

7. A 0, 2, 3, 4, 5 számjegyekből legalább háromjegyű számokat képezünk. Minden így kialakított számban egy számjegy a megadottakból csak egyszer fordulhat elő. Hány különböző, legalább háromjegyű számot kaphatunk így?

8. Elmegyünk egy cukrászdába, ahol hat különböző ízű fagylaltot árulnak.

a) Hány háromgombócos fagylaltot rendelhetünk pohárban, ha a gombócok sorrendje nem számít és ugyanolyan ízűek is lehetnek a gombócok?

b) Hány különböző háromgombócos fagylaltot rendelhetünk itt, ha azonos ízű gombócokat is kérhetünk, és nekünk számít az is, hogy milyen sorrendben vannak a gombócok a tölcsérben?

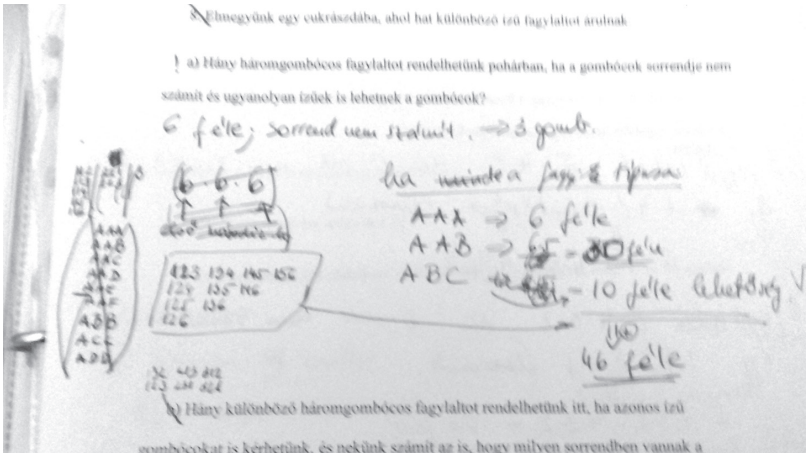
9. Öt fiú és négy lány körtáncot táncolnak.

a) Hány különböző kör alakítható ki?

b) Hány különböző kör alakítható ki akkor, ha azt is megszabjuk, hogy az öt fiú egymás mellett legyen?

A feltételek növekedéséből származó hibák

A munkamemória megtelhet, nincs hely a hosszútávú memóriából visszahívott szkémákkal műveleteket végezni, tervezni. Például ilyenek a II. rész feladatai. A javításnál célszerű a feladatokat kisebb részekre bontani, és úgy megoldani. Az alábbi feladat megoldás mutatja azonban, hogy még így is kimaradhatnak esetek.(9. ábra)



9. ábra megoldása, kimaradt egy komplex egység (complex chunk)

Az eredmények, ahová eljutottunk

Az eredményeket feladatonként, a két kiválasztott tanuló (F. M.) és (S. B.) teljesítményével összehasonlítva leírom.

(F. M.) csak a 8. a) feladatrészben vétett hibát. Az utolsó lépésben szorzás helyett osztott. Az 1. feladatot 13 tanulóból 11 hiba nélkül oldotta meg. A két hibát az okozta, hogy az egyik tanuló 4 jegyű

számokat képzett, a másik pedig abból ered, hogy az ismétlődéseket nem zárta ki a tanuló. (S. B.) hibátlan.

A 2. feladatnál 13-ból 11 jó. (S. B.) hibátlan.

A 3. feladatnál (S. B.) a végeredmény felével számol. A jó végeredmény dupláját kapja. Nem veszi észre, hogy van olyan, amit már felsorolt. A csoportban 13-ból 12 jó.

A 4. feladatot (S. B.) hibátlanul oldja meg. A csoportban 3-an hibáznak. Szisztematikus felsorolást alkalmaznak és kimaradnak esetek.

(S. B.) 5. feladata jó, a csoportban 9-en jól válaszolnak. A többi 4 ember hibája abból adódik, hogy a sorrendet is számításba veszik a tanulók.

A 6. feladatnál (S. B.) kombinációra gondol, de nem veszi észre, hogy az ismétléses. A csoportból a többi tanuló megoldásának a fele jó. A többiek a 4-es feladatot a hatos feladattal egyenértékűnek gondolják. A 2. részben a 7-es feladatnál (S. B.) kihagyta a legalább szót és azt, hogy a számok 0-val nem kezdődhetnek. A munkamemóriájában már nem volt elegendő hely az adatok, összefüggések megtartására. A csoportból 4-en válaszoltak helyesen. A többiek is a legalább szót hagyták ki és így csak részmegoldást adtak. (S. B.) a 8-as és 9-es feladatoknál már csak részeredményeket adott. A 8-as és 9-es feladatra is 2 tanuló adott hibátlan választ.

A kísérlet alapján a hipotézist igazoltnak látom. A tanulók szívesen foglalkoznak kombinatorika feladatokkal. (F.M.) elmondja, hogy versenyeken is szívesen választja a kombinatorika feladatokat és általában jól oldja meg azokat. (S. B.) közelebb jutott a feladatok megoldásához. A fejlődés jól érzékelhető volt [12].

IRODALOM

[1] Internet, http://www.psychologyunlocked.com/working-memory/

[2] A. Ambrus, Bevezetés a matematika didaktikába, Egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös kiadó, Budapest, 2004, 38-39. pp.

[3] Internet, https://www.mtsu.edu/cala/jensen.pdf

[4] H. Gardner, Northern Illinois University, Faculty Development and Instructional Design Center facdev@niu.edu, www.niu.edu/facdev, 815.753.0595 [5] E. Árokszállási," I learned a lot and it did not go": Development of the combinatorial thinking in the secondary school, Ars Invendiendi et Dejudicandi, Edited by T. Fritzlar and B. Zimmermann, Vol.6, Promath Conference 2015, pp.23-31.

[6] Internet, www.dailymotion.com/.../x4sdswb_human-brain-how-smart-can…,

[7] M. Racsmány, A munkamemória szerepe a megismerésben, Akadémia kiadó, Budapest, 2004, pp. 100. és Internet, http://epa.oszk.hu/00000/00015/00038/pdf/10szemle07.pdf

[8] E. Árokszállási, 57. Rátz László vándorgyűlés, PowerPoint prezentáció, Székesfehérvár, 2017. július 4 – 7.

[9] A. Ambrus, A matematika tanulás-tanítás néhány kognitív pszichológiai kérdése, Gradus Vol 2, No 2 (2015) pp. 63-73.

[10] J. Sweller et al., Cognitive Load Theory, Explorations in the Learning Sciences, Instructional Systems and Performance Technologies 1, pp. 55-57, 2011.

[11] Pappné Kovács Katalin, konzultációk, ELTE, 2012-2013.

[12] E. Árokszállási, Hogyan segíthetünk az átlagos képességű, és a matematikában tehetséges tanulóknak egyszerre? (A kombinatorikus gondolkodás fejlesztése a középiskolában), in: Conference MAFIOK XL., Óbudai Egyetem Alba Regia Műszaki Kar, Székesfehérvár, 2016, pp. 166-171.

Mértani ismeretek tanítása Erdélyben régen és ma

Baranyai Tünde

Babeș-Bolyai Tudományegyetem
Pedagógia és Alkalmazott Didaktika Intézet
Szatmárnémeti Tagozat

Mottó

"Mert minél nagyobbak lesznek tanítványaink, annál többek leszünk mi magunk is."

Vizi Elek Szilveszter

Előszó

Ambrus András tanár úrral egy Domus Hungarica ösztöndíj kapcsán találkoztunk. Debrenti Edittel együtt pályáztunk az MTA által meghirdetett junior ösztöndíjára és 2004 januárjától két hónapon keresztül vehettünk részt az ELTE mindennapjaiban. A tanár úr azon kívül, hogy bemutatta a matematika didaktika kart, nagy érdeklődést mutatott a mi munkánk iránt is. Mivel csak néhány hét telt el a doktori fokozat megszerzése óta, elkérte dolgozataink összefoglalóit, hogy megismerje a mi munkánkat is. Szeretettel emlékszem vissza a beszélgetéseinkre és arra, hogy a tanár úr könyveit, tanulmányait is megismerhettük, beszélgethettünk róla. Hamar kiderült, hogy a matematika didaktika terén hasonló elveket vallunk. Fontosnak tartjuk például a reprezentációkat, a felfedezéses tanulást. Egy másik dolog, amit meg szeretnék köszönni Ambrus tanár úrnak, az hogy egy könyvem lektorálása miatt felkeresve őt, megismertetett Herendiné Kónya

Eszterrel. Számomra nagyon fontos, hogy Ambrus tanár úr bevont a MIDK konferencia sorozatába, melyen 2010 óta minden évben részt is veszek. Emlékezetes volt számomra a 2011-es év, amikor Szatmárnémetiben szerveztük meg a konferenciát. Ezek a januári alkalmak mindig feltöltenek, a sok érdekes előadás, a hozzászólások, a szünetekben és étkezések alkalmával folytatott beszélgetések lehetővé teszik megvitatni a számunka oly fontos didaktikai kérdéseket, megosztani egymással a tapasztalatokat, bíztatni egymást a munka folytatására.

Kedves András! Szeretném megköszönni azt, hogy megismerhettelek, hogy kitágítottad a látókörömet a matematika didaktika területén, melyben nagy hiányosságokkal rendelkeztem. Kívánom, hogy még nagyon sokáig légy közöttünk. Isten éltessen sokáig, boldogságban, egészségben!

Az alábbi tanulmány története röviden az, hogy az idei éveben a családi nyaralás során Csíkszentdomokosra is eljutottunk. Márton Áron püspök szülőfalujában, meglátogattuk a püspök emlékházát, ahol meglepődve tapasztaltam, hogy az Erdélyi iskola folyóirat bemutatásaként matematika tevékenységek terveit voltak kiállítva. (1.ábra, 2.ábra) Érdekes volt szembesülni azzal, hogy a múlt század harmincas éveiben hasonló elveket vallottak a pedagógusok a matematika tanításáról, mint napjainkban. Sokszor azt gondoljuk, milyen új dolgokat fedeztünk fel és kiderül, hogy ezt már elejink is sikerrel alkalmazták.

Bevezetés

Tapasztalatom szerint a mértan tanítása az elemi osztályokban nagyon fontos és nehéz feladat. Tanulmányomban szeretnék bemutatni néhány példát, melyeket erdélyi magyar nyelvű matematika tankönyvekben illetve didaktika folyóiratokban találtam. Érdekes megfigyelni, hogy a különböző korszakokban hogyan próbálják a gyerekeket bevezetni a matematika e területébe, milyen módszereket, milyen illusztrációkat tartanak megfelelőnek.

Elméleti megalapozás

A mértani fogalmak tanítása az elemi osztályos tantervben koncentrikusan van jelen. (programe.ise.ro) Már az óvodai program is kéri a téglalap, négyzet, kör és háromszög felismerését a gyermekek környezetében lévő tárgyakon. Az elemi osztályokban a síkidomok mellett néhány térbeli alakzattal is megismerkednek a gyermekek, megfigyelik ezek tulajdonságait, jellemzőit. A mértani fogalmak megismerésére sajnos elég kevés idő marad a matematika anyag túlzsúfoltsága miatt, ez a tankönyvekben megjelenő leckék rövidségén is lemérhető, illetve a kevés javasolt feladatból, melyek a mértani ismeretek begyakorlására irányulnak. A következőkben arra szeretnék kitérni, hogy milyen szempontokat kell, figyelembe vennünk a mértani fogalmak tanításakor.

Pólya György szerint, „Az ábráknak a geometriai feladatokban igen fontos szerepük van, de legkülönbözőbb fajta feladatok megoldásában fontos segédeszközt jelentenek,…még olyan feladatoknál is, ahol első látásra semmiféle geometriai vonatkozás nem fedezhető fel." (Pólya, 2000, 55). Az előbbi idézet a geometriai fogalmak bevezetésekor is nagy jelentőséggel bír, ugyanis egy megfelelő ábra nagymértékben segíti a fogalom megértését. Szintén Pólya, A gondolkodás iskolája című könyvében találkozunk a heurisztikus gondolkodás fontosságával: „A heurisztika célja a felfedezés és a feltalálás módszereinek és szabályainak tanulmányozása". AAmbrus András didaktika kurzusában (Ambrus, 2004, 146) az irányított felfedzéses tanulás jelentőségéről ír: „A felfedezéses tanulás folyamán bizonyos ismeretelemek, eljárások, képességek rendre ismétlődnek, begyakorlódnak. Az irányított felfedezéses tanulás problémák megoldását jelenti." Azirányított felfedezéses tanulás esetén nagyon fontos, hogy a pedagógus megfelelően szervezze meg a tevékenységet, figyelembe véve a gyermekek ismereteit, felhasználva az ábrázolás lehetőségét, mely a mértan tanítása esetében nagy jelentőséggel bír. Az elemi matematikaoktatásban a konkrét tárgyak megfigyeléséből indulva jutunk el az absztrakt

fogalomig, „A geometriai fogalmak és összefüggések megismerése azáltalános iskolában a globális tulajdonságoktól, a szemléletestől halad az absztraktabb megállapítások felé. (Balla – Herendiné - Paulovits, 2015, 144)

Összefoglalva a fentieket, a mértani fogalmak tanításakor fontosak az ábrák, a szemléltetés minél kedvezőbb kihasználása, illetve a felfedeztető tanítás megvalósítása. Előnyt jelent ha a kisiskolások a konkrét tárgyak megfigyeléséből indulnak ki és így jutnak el az absztrakt geometriai fogalmakig, tulajdonságokig.

A tanulmányomkövetkező részében bemutatásra kerül néhány részlet matematika tankönyvekből és matematika témájú tanulmányokból. Megfigyelhetjük, hogy az Erdélyben megjelent munkákban milyen mértékben vették figyelembe azokat a szempontokat, melyek a mértani ismeretek tanításában elengedhetetlenül szükségesek.

Mértan tanítása a XX. század elején

Első példáimat az 1933-ban megalapított Erdélyi Iskola című folyóiratból vettem. A folyóiratot Márton Áron püspök és György Lajos alapította 1933-ban és 1940-ig folyamatosan megjelent, külön módszertan rovattal rendelkezett. Az óratervek különböző tanítóköri gyűléseken bemutatott foglakozások tervei voltak, melyek segítették a pedagógusok munkáját, illetve a szülőket is abban, hogy gyermekeiket segítsék a tanulásban. (Ozsváth, 2012)

A folyóiratnak több matematika tárgyú írása is volt, ezek közül néhány cím:

- Kiss József: Szemléltető eszközök és anyagok a népiskolai számolás és mérés tanításához. 1938/39, 5-6. sz., 323-330. l.
- Paál Elek: Egyszeregytanítás. 1939/40, 5-6. sz., 315-325. l.
- Számolási tehetség vizsgálata a prágai iskolákban. 1938/39, 3-4. sz., 204. l.

Sajnos nem sikerült megtalálnom az írásokat, csak néhány foglalkozás tervről készített fotót találtam, ezeket szeretném bemutatni.

Az alábbi két fotót (1. és 2. ábra) a csíkszentdomokosi Márton

Áron emlékházban fényképeztem, melyek az Erdélyi iskola című folyóiratban jelentek meg. Az első fotón (*1. ábra*) szereplő terv a Szülők iskolája rovatban jelent meg, a címben szerepel, hogy a munka szerzője Paál Elek és egy jutalmazott pályamunkáról van szó. A folyóirat szerkesztői fontosnak tartották, hogy a jó gyakorlatokat bemutassák a folyóirat olvasóinak.

A KÖR ÉS RÉSZEI.

MÉRTANTANÍTÁS AZ ELEMI ISKOLA IV. OSZTÁLYÁBAN.

Írta: PAÁL ELEK.

(Jutalmazott pályamunka.)

HANGULATKELTÉS.

Egy képet tartok kezemben s érdeklődéssel nézegetem. — Mi az tanító bácsi? — kérdik kíváncsian a gyermekek. — Egy képrejtvény, ki kellene találnunk, mit jelent, — mondom a képet mutatva.

A kép leírása ez: Rejtvény. Felső részében egy iskola látható, melynek kéményéből füstöt görbe vonal jelzi. Alsó részében (az iskola udvarán) körbenálló gyermekek, a körön belül bárány, a körön kívül pedig farkas látható.

SZÜLŐK ISKOLÁJA.

1. ábra: Paál Elek: „A kör és részei" című terve az Erdélyi Iskola folyóiratból

A IV. osztályos gyermekek számára kidolgozott matematika tevékenység célja szemléltetni a görbe vonalat, mely az iskola kéményéből elszálló füst által van bemutatva, illetve a kör belső és külső tartományát, olyan formán, hogy a bárány a gyerekek által alkotott kör belsejében a farkas pedig a körön kívül helyezkedik el. A szerző szerint ez a szemléltető kép hangulatkeltésre használhatja a pedagógus, ezzel felkeltve a gyermekek figyelmét. Úgy gondolom, hogy a lassan 80 évvel ezelőtt készített terv a mai kor elvárásainak is megfelel. A felfedeztető tanítás elvét használja, az ábra megfelelő, a gyermekek életkorához igazodik, illetve a falusi iskola is szerepel a képen. Természetesen ezt a képet másképpen is lehetne hasz-

nálni. Meg lehetne kérni a gyermekeket, hogy fogalmazzanak meg kérdéseket felhasználva a képet. Például: Hány gyermek van a képen? Hány állat szerepel a képen? Milyen alakú az iskola udvara? Hánnyal kevesebb az ablakok száma, mint a gyerekek száma? Fiú vagy lány van több a képen? stb.

Második példa szintén az Erdélyi iskola című folyóiratból származik, a Céhek története rovatból, címe „Mellényke és pelenkanadrág", sajnos nincs feltüntetve a szerzője.

MELLÉNYKE ÉS PELENKANADRÁG.

Mellénykére és pelenkanadrágra legalkalmasabb az erősebb szálú vászon; de lehet barchendből vagy hasonló anyagból is készíteni. 80 cm. széles anyagból 60 cm-nyit veszünk, azonkívül 1 m. keskeny hímzés, 1 tucat cérnagomb, 1 orsó 6-os cérna és ½-es géptű kell hozzá.

A mellényke szabásrajzának leírása:

Mértékvétel.

1. Mellényke hossza	12 cm
2. Mellényke bősége	53 cm
3. Vállpánt hossza	20 cm
4. Vállpánt szélessége	3 cm

Magyarázat.

AB = mellényke bősége	53 cm
AC = BD mellényke hossza	12 cm
AE = CF = ⅓AB = ⅓CD	26·5 cm
EG = EH = Nyakk. az előrészen	4·5 cm
BJ = AJ = Nyakk. a hátrészen	6·5 cm
JK = HL = GM = IV vállpánt szél.	3 cm

A nadrágszabásának leírása.

Mértékvétel.

1. Nadrág hossza	50 cm
2. Nadrág bősége	44 cm

Magyarázat.

2. ábra: Mellényke és pelenkanadrág

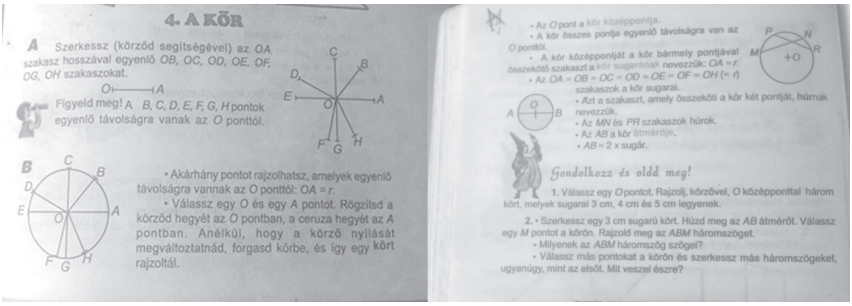
A 2.ábra bemutatja, hogyan kell elkészíteni a mellénykét és pelenkanadrágot, milyen méretű vásznat, hímzést, mennyi cérnát kell vásárolnunk hozzá, illetve milyen méretekre van szükségünk. A két ábrán, a mellényke illetve pelenkanadrágot ábrázolón, feltűnnek a centiméterben megadott méretek, melyekből kiindulva különböző matematikai számításokat végezhetnek a tanulók. Ezen az ábrán is megjelennek a görbe vonalak, szakaszok. A feladat a mindennapi éltből indul ki, a szemléltetés ebben az esetben is pontos. Kiindulva a rajzból, szintén több feladat fogalmazható meg.

Megjegyezhetjük, hogy mindkét ábra arról tanúskodik, hogy a feladatok,melyeket a tanítók megoldásra javasolnak, mindig a mindennapi életből származnak, fontos szempont a szemléltetés, a gyerekek érdeklődésének felkeltése a téma bejelentése előtt.

Mértan tanítása a XX. század végén

Az elkövetkezendőkben a 90-es években kiadott matematika tankönyvekből választottam mértani témájú leckét.

A IV. osztálynak szánt matematika tankönyvben (Petrica,- Grineanu,- Cojocaru, 1997) „A kör" című leckét mutatom be. A tankönyv kéri több, azonos hosszúságú, közös kezdőpontú szakasz szerkesztését, majd felhívja gyermekek figyelmét, hogy a kapott pontok az O ponttól egyenlő távolságra vannak. Nem találunk a mindennapi életből választott példákat és a feladatok is elvontak, absztraktak, szerkeszteniük kell adott sugarú köröket, körző segítségével. Úgy gondolom, hogy egy negyedik osztályos gyerek számára ezek a szerkesztési feladatok nehezek.



4. ábra: A kör fogalmának bevezetése egy 1997-es matematika tankönyvben

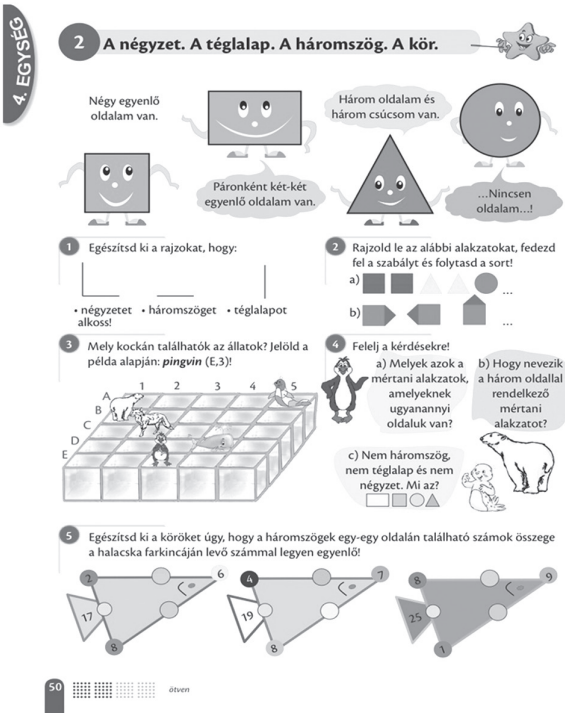
Összehasonlítva a 30-as években kiadott tervezettel, a fenti, *4. ábrán* bemutatott fogalom értelmezés magas szintű, nem alkalmazkodik a gyerekek életkori sajátosságaihoz, nem jeleni meg a mindennapi életből választott tárgyhoz való hasonlítás.

Mértani ismeretek tanítása napjainkban

A 2013-ban megjelent új, elemi osztályosoknak készített matematika és környezetismeret tanterv (a két tantárgyat az I. és II. osztályban integráltan tanítják) alapkompetenciái között szerepel:

„A közvetlen környezetben megtalálható tárgyak mértani jellemzőinek felismerése.” Az új tanterv szerint a mértani alapismeretek bevezetése a mindennapi életben, a gyermekek környezetében található tárgyak vizsgálatával, megfigyelésével kezdjük, hasonlítjuk a tárgyakat az ismert síkidomkhoz. Az új tanterv sokban különbözik a régitől, ezért szükségessé vált az új matematika tankönyvek bevezetése is. Sajnos a tankönyvek közül csak az első és második osztályosok számára sikerült tankönyveket kidolgozni a 2016-2017 tanév végéig. Ezért nem sikerült IV. osztályos példát választanom.

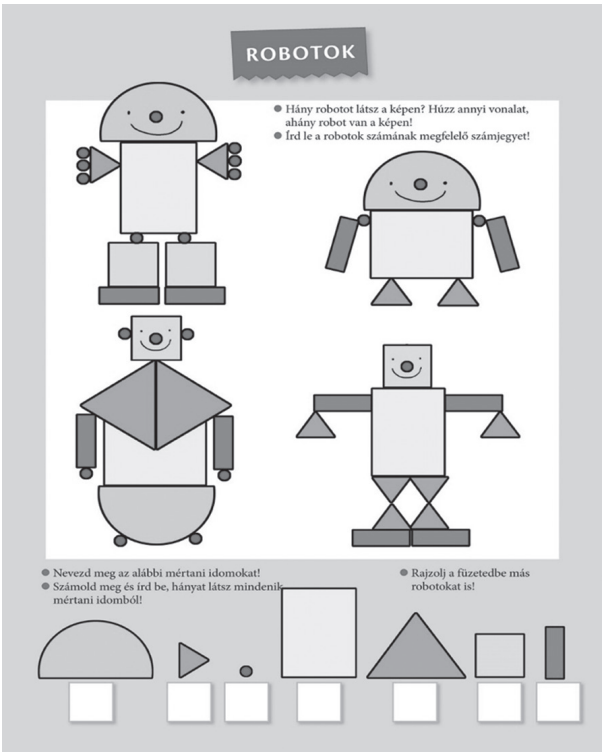
Az érvényben lévő matematika tankönyvekre jellemző, hogy a minisztérium elvárásait teljesítve, minden tankönyv digitalis változatban is elérhető, CD mellékletük is van a tankönyveknek, mely interaktív tanulási tevékenységeket tartalmaz. Ezek az interaktív tartalmak a tankönyvhöz tartozó CD-n és a tanügyminisztérium honlapján is elérhetőek.(manual.edu.ro)



5. ábra: II. osztályos matematika tankönyv egy oldala

Az *5. ábra* az egyik II. osztály számára készített tankönyvből (Dumitrescu, Ciobanu, Birta, 2015) azt az oldalt mutatja be, amelyiken szerepel a síkidomok bevezetése. Látható, hogy egy II. osztályosnak azt kell tudja a körről, hogy „nincs oldalam".

A következő oldalon szerepel egy rajz a félkörről is, mely fogalommal találkoznak egy tankönyvhöz készített feladat lapban is. (*6. ábra*)



6. ábra: Feladatlap a síkidomok gyakorlására

A feladatlap segítségével a tanító ellenőrizheti, hogy a gyerekek felismerik-e a különböző, tanult síkidomokat. A különböző színekkel jelölt síkidomok segítik a gyerekek feladatmegoldását, jó ötlet, hogy a feladat utolsó alpontja kéri egy újabb robot megrajzolását, esetleg meg lehetne kérni a gyereket, hogy szóban nevezze meg, milyen formákat tartalmaz az általa rajzolt robot.

Következtetések és javaslatok

A bemutatott példák alapján kijelenthetjük, hogy Erdélyben, a különböző korszakokban a matematika tankönyvek és tanulmányok szerzőinek különböző céljaik voltak, ami a mértan tanítását illeti. Nagy különbség tapasztalható az illusztrációkban, ami egy természetes folyamat, a digitális forradalom miatt, bár ez a változás nem mindig a minőségibb felé mutat, talán jobban is ki lehetne használni a lehetőségeket, talán nem kellene elfelejteni azt, hogy az élményszerű matematikaoktatásnak milyen előnyei vannak.

Mivel a III. és IV. osztályos matematika tankönyvek még nem készültek el, talán jó volna megfontolni, hogy kicsit többet foglalkozzunk a mértani formákkal, több és változatosabb szerepeljen a tankönyvekben illetve a CD mellékletben. Talán az is segítene, ha több tankönyv készülne el, amelyből a tanító az osztályának legmegfelelőbbet tudná kiválasztani.

Könyvészet

Ambrus András (2004), *Bevezetés a matematika-didaktikába,* ELTE Eötvös Kiadó, Budapest

Balla Éva – Herendiné Kónya Eszter – Paulovits György, (2015) *A középiskolai matematikatanítás elméleti és gyakorlati kérdései,* Debreceni Egyetemi Kiadó, Debrecen

Dumitrescu, I. – Ciobanu, N. – Birta,A.C. (2015) *Matematika és környezetismeret. Tankönyv II. osztály számára,* CD Press Kiadó, Bukarest

Ozsváth Judit: (2012) *Az Erdélyi Iskola című oktatásügyi és népnevelő folyóirat,* Magiszter, VI. szám, Csíkszereda

Petrica, I – Grindeanu, N. – Cojocaru, I. (1997), *Matematika Tankönyv a IV. osztály számára,* Petrion Kiadó, Bukarest

Pólya György (2000) *A gondolkodásiskolája,* Akkord Kiadó, Budapest

manuale.edu.ro/ 2017. 07.20

programe.ise.ro/ 2017.08.05

Csíkos Csaba

Visszatérés négy matematikadidaktikai kérdéshez

2000-ben megírt és 2001-ben megvédett doktori értekezésem címe „A bizonyítási képesség értelmezése és fejlődésének jellemzői iskoláskorban" volt. A téma általános neveléstudományi relevanciával bírt, ugyanakkor a példák és a viszonyítási pontok a matematikadidaktikából származtak. Így szinte természetes volt, hogy Ambrus András lett az egyik opponensem.

Ambrus András alapvetően pozitív bírálatot írt a dolgozatról, és fölvetett négy olyan kérdést, amelyekre az opponensnek írt válaszomban annak idején igyekeztem megfelelően reagálni. A doktorjelölti választ elfogadta Ambrus András. Mint minden jó kérdésnél, a válaszok szinte tetszőleges hosszúságúk és mélységűek lehetnek, így most egy másik műfajban és az eltelt 17 év fejleményeit beépítve igyekszem újra meglátogatni Ambrus András négy kérdését, megköszönve ezzel az együttgondolkodás lehetőségét.

Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai gondolkodásban

Ha a bruneri reprezentációs szintek elméletéhez nyúlunk vissza, akkor azt mondhatjuk, hogy mielőtt szimbolikusan (például nyelvileg) reprezentáljuk a világ dolgait, előtte az ikonikus reprezentációk uralják gondolkodásunkat. Fontos, hogy a képek akkor is gondolkodásunk fontos elemei maradnak, amikor már rendelkezésre áll a nyelv szimbólum-rendszere. A kilencvenes évektől élénk kutatások folytak a gondolkodási stílusok (vizuális-verbális) és a matematikai problémamegoldás kapcsolatának vizsgálatára (ld. pl. Mayer és Hegarty, 1996)

Mayer és Hegarty kutatásaiban jelentős fejlemények tekinthető, hogy a vizuális reprezentációk alapján a vizuális stílusú gondolko-

dóknak két csoportját tudták elkülöníteni: sematikus és piktoriális vizualizálók. A matematikai problémamegoldásban különösen tanulságos e két csoport összehasonlítása: a sematikus vizualizálók matematikai szempontból nézve lényegre törő, absztrakt (vagy ahogyan a csoport nevéből visszakövetkeztethető: sematikus) ábrákat képzelnek el vagy ilyen rajzokat készítenek, miközben például egy szöveges feladatot megoldanak. A piktoriális vizualizálók valósághű vagy annak szánt képeket gondolnak el vagy ilyeneket rajzolnak, így segítve a feladatmegoldás folyamatát. Ha pl. egy matematikai szöveges feladatban két név és hozzájuk tartozó testmagasság-adatok szerepelnek, akkor egy sematikus vizualizáló vízszintes vagy függőleges szakaszokat gondol el vagy ilyeneket rajzol, míg egy piktoriális vizualizáló akár teljes emberalakokat skiccel föl, és ezekhez rendeli hozzá a feladat számadatait. Ezzel szemben a verbalizálók nem szívesen készítenek rajzokat, és beszámolóik alapján a fejükben lévő képeknek is alárendelt szerepe van a feladatmegoldás folyamatában. Mayer és Hegarty 7. osztályos amerikai diákok körében végzett felmérésében tanulságos eredmény volt, hogy a sematikus vizualizálók érték el átlagosan a legjobb eredményt, őket a verbalizálók követték, végül a piktoriális vizualizálók következtek. Bár elvileg az oksági kapcsolat megkérdőjelezhető, sőt, akár meg is fordítható (a sikeres feladatmegoldók esetleg rászoknak a sematikus ábrák készítésére?), de az eredményből egy valami kétségtelenül következik: el kell felejteni a nyers verbális-vizuális dichotómiát a gondolkodási stílusok terén. Nemcsak hogy önmagában véve nem érdemes vizuális stílust és verbális stílust megkülönböztetni, hanem az is káros lehet, ha egyiket vagy másikat értékesebbnek, előbbre valónak tekintjük.

Ráadásul a tanulók kedvelt gondolkodási stílusa nem feltétlenül a számukra leghatékonyabb gondolkodásmód (ld. pl. Woolfolk, 1993). Így eleve kudarcra ítélt egy olyan oktatási stratégia, amely feltétel nélkül alkalmazkodni próbál a gyermek által preferált mentális reprezentációkhoz. Ezt erősíti meg Massa és Mayer (2006) eredménye, akik szerint a verbalizálók és a vizualizálók számára nem célszerű különböző multimédiás tanulási helyzeteket teremteni. Akkor miért élvezzenek kitüntetett figyelmet a vizuális rep-

rezentációk? Ha Mayer és Hegarty előzőleg említett eredményeiből megengedjük azt a következtetést, hogy a sematikus vizuális reprezentációk és a sikeres matematikai problémamegoldás között kétirányú oksági kapcsolat lehetséges, akkor feltétlenül érdemes megpróbálnunk felhasználni az oktatásban azt az irányt, amely a vizuális reprezentációk típusa felől vezethet a jobb teljesítményhez. Ugyanakkor nem engedhető meg, hogy csak és kizárólag a sematikus vizuális reprezentációk elsőbbségére épüljön a fejlesztés.

Egy harmadik osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérletben Szitányi Judittal és Kelemen Ritával dolgoztunk együtt. Kiváló példája volt együttműködésünk a különböző szakmai műhelyekből érkezők gyümölcsöző kooperációjának. Szitányi Judit Szendrei Julianna doktorandusza volt, Kelemen Ritának pedig Ambrus András javasolta, hogy a „Szegedi műhely"-ben végezze doktori tanulmányait. A kísérletet magyar és angol nyelven is bemutattuk (Csíkos, Szitányi és Kelemen, 2010, 2012), és készült belőle egy eddig még publikálatlan munkafüzet is, amely a pedagógusképzésben és – önképzésben reményeink szerint jól felhasználható. Ebben a tanulmányban a kísérletnek azt a jellemvonását emelem ki, hogy tudatossá tettük a gyerekek felé a matematikai szöveges feladatok megoldása során a rajzok készítésének lehetőségét és fontosságát (ez még nem volna új jellemvonás), ám olyan módon, hogy beszélgettek egymással és a tanítóval a különféle rajzokról, azok felhasználásáról. Anélkül tették ezt, hogy egy-egy feladatnál valamely rajzot a legjobbnak vagy győztesnek minősítették volna. Megpróbáltuk a figyelmüket a saját feladatmegoldó folyamatukra irányítani, amely idea a nyolcvanas évektől, nagyrészt Schoenfeld (1987) munkája nyomán széles körben elterjedt a matematikadidaktikában.

A vizuális reprezentációk vizsgálata a matematika más területein is lényeges kérdés – a vizualitáshoz természeténél fogva hozzákapcsolt geometrián túl is. A deduktív gondolkodás egyik jelentős elmélete, Johnson-Laird (1983) „mentális modelljei" (részletesebben ld. Csíkos, 2009)szerint a nyelvi-logikai műveleteket akkor tudjuk megfelelően elvégezni, ha a logikai állításban szereplő objektumokat és logikai kötőszavakat „mentálisan (képekkel) modellezzük"; például körökkel, háromszögekkel. A mentális modellek átmenetet

képviselnek az analóg reprezentációk, például vizuális, auditív vagy más képzetek és a szavakba önthető, verbális propozíciók között.

Ambrus András kérdése annak idején arra irányult, hogy vajon tudatosan zártam-e ki vizsgálódásaim köréből a vizuális reprezentációkat. A válaszom erre igenlő volt, de az eltelt bő másfél évtizedben, úgy érzem, jelentőségének megfelelően foglalkoztam a területtel.

Ambrus Andrásnak egy neten föllelhető prezentációjában elrettentő példaként idézi egy matematikatanár gondolatait: *„Mi már olyan okosak vagyunk, hogy nem szükséges szakaszokat rajzolnunk szöveges feladatok megoldásánál, fel tudjuk írni az egyenleteket anélkül is." (forrás: www.bbtepedsm.ro/letoltheto/Ambrus%20Andras.ppt)*

Ez az idézet egy naiv elképzelést tár elénk azzal kapcsolatban, hogy a matematikai feladatmegoldás belső és külső reprezentációinak létezik egyfajta sorrendje, amely nehézségi és esetleg értékességi sorrendnek tekinthető. Ha elfogadnánk a fenti kijelentést, abból az következne, hogy az igazán okos matematikusok már nem használnak vizuális reprezentációkat vagy firkákat, vázlatrajzokat a gondolkodási folyamat során. Ami nyilván nem áll, és egyetlen ellenpélda, akár Poincaré önreflexióinak említése elegendő a cáfolathoz.

Bár valóban létezik a reprezentációknak egyfajta időbeli megjelenési sorrendje (Ambrus, 1995, kellően részletesen bemutatja Bruner reprezentációs elméletét), Ambrus András is hangsúlyozza, hogy „a három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik" (35. o). Ezek a megállapítások teljesen összhangban vannak azzal a fölfogással, ahogyan sikeres fejlesztő kísérletünket a harmadikos tanulók körében megterveztük és implementáltuk.

A formális deduktív bizonyítások helye a bizonyítási képességben

Ambrus András megkérdezte annak idején opponensi véleményében, hogyan látom a formális deduktív bizonyítások szerepét a bizonyítási képességben. Fontos ehhez felidéznünk Harel és Sowder (1998) modelljét, amelyet frissen föl tudtam használni a doktorandusz éveim során, és 1999-ben, első PME (Psychology of

Mathematics Education) konferenciámon már a modell segítségével értelmezve tudtam bemutatni nagymintás empirikus eredményeimet. Harel és Sowder modelljében lényegileg három, hierarchikusan rendezhető bizonyítástípus szerepel: tekintélyelvű, induktív és deduktív bizonyítások. Mindezeknek több altípusa létezik, például az induktív bizonyítások lehetnek intuitív gondolatmenetek vagy néhány példával alátámasztott kijelentések, és ne feledjük, hogy a teljes indukciósnak nevezett bizonyítások a deduktív bizonyítások egy csoportját jelentik. Kutatásomra később Harel (2007) úgy hivatkozott, mint példára a bizonyítástípusok matematika melletti nem matematikai alkalmazására.

Vajon a formális deduktív bizonyítások kezelhetők-e hasonló módon matematikai és nem matematikai gondolatmenetekben? A válasz alighanem igenlő, hiszen a jogban, a filozófiában és nyilván a természet- és társadalomtudományokban is alapvetően fontosak a formalizált, a logikai következtetési szabályoknak teljesen megfelelő bizonyításmenetek. A matematikaoktatásnak páratlan lehetősége van vagy lehetne, hogy a deduktív bizonyítások megfelelő időben és megfelelő módon történő bevezetésével vezető szerepet játsszon az általános értelemben vett bizonyítási képesség fejlesztésében. A deduktív bizonyítások azonban a matematikában sem szükségszerűen formalizáltak, és sokan összekeverik a formális bizonyítások bevezetését a deduktív bizonyítások bevezetésével. Hiszen kisiskoláskortól kezdve, amikor egyszerű modus ponens szabályalkalmazással matematikailag helyes kijelentéseket teszünk, tulajdonképpen bizonyításokat adunk. Elfogadván, hogy éppen azokat az egész számokat nevezzük párosnak, amelyek kettővel oszthatók, és igazolva azt, hogy a 0 osztható kettővel, tulajdonképpen egy rövid matematikai bizonyítást végeztünk. A szakmai és laikus nyelvben azonban a matematikai bizonyítások a formális deduktív bizonyításokat jelentik, amelyekben egyfajta rituálét követünk, melynek a vége gyakran a q.e.d. rövidítés, az előtte lévő dolgokat pedig a tanulók sokszor jobb híján versszerűen, kívülről megtanulják. A matematikai bizonyítások a köznyelvben és gyakran a matematikaórán az úgynevezett tételekhez kötődnek, és nem akármilyen állítást nevezhetünk tételnek, hanem csak azokat, amelyeket az évszázados

kánon is annak nevez. Így az első formális deduktív bizonyítások az iskolában nagyon későn kerülnek elő, akkor, amikor már elérhető a komolyabb, tételnek nevezhető állítások fogalomkészlete. Vagyis a formális deduktív matematikai bizonyítások jóval később kerülnek elő, mint ahogyan a bizonyítások megértéséhez szükséges következtetési szabályok az elmében már működőképesek. Piaget modellje szerint és meglévő empirikus eredmények (Vidákovich, 1998) alapján az ismerős fogalmakkal már hat-hétéves kortól jó eséllyel tudunk a modus ponens következtetési sémára támaszkodni, míg absztrakt, tapasztalatokhoz, képzetekhez nem kapcsolódó fogalmak esetén valóban a 12 éves kor után lesznek működőképesek az egyszerű bizonyítási sémák. Az indirekt bizonyításokhoz feltételezhetően szükséges modus tollens séma pedig amerikai kutatási eredmények szerint inkább 15 éves kor után áll rendelkezésre tetszőleges, absztrakt tartalom esetére.

Az utolsó központi, előíró tanterv, amelynek hatása a mai napig érezhető iskolarendszerünkön, hetedik osztály végére követelményként írta elő a Pitagorasz-tétel és annak megfordításának ismeretét. Egy tétel megfordításához szükséges, hogy valaki képes legyen logikai állítások tagadását megfogalmazni, és emellett képes legyen hipotézisként olyan állítást felhasználni, amelyet hamisnak vél. Ezek a mentális előfeltételek még 11. osztályban is csak a tanulók kevesebb, mint felénél adottak (Thompson, 1996). Így amikor az 1995-ös Nat a 16 éves kori követelmények között tűzte ki egyes egyszerű állítások tagadásának megfogalmazását, valójában a pszichikus rendszer fejlődésének realitásához közeledett, noha többen akkor jelentős színvonalcsökkenésként beszéltek a változásról.

Az előző szakaszban megidézett tanári fölfogásban tetten érhettük a formális jelölésekre (konkrétan az egyenletekre) áttérés korai trónra emelését. Hangsúlyozni szeretném, hogy nem a formális bizonyítások bevezetése a korai, hanem azoknak a trónra emelése. Kicsi-pici matematikai állításokat modus ponens séma alapján bizonyítani már alsós korban is lehetséges, de – ahogyan a bruneri reprezentációs szinten „békés egymás mellett élését" hirdettük – a különböző szintű bizonyítástípusok párhuzamosan, egymás mellett fejlődnek a matematikai gondolkodásban. Ha nem ismernénk

el a deduktívnál alacsonyabb hierarchiai típusban tartozó „bizonyítások" létjogosultságát, akkor megtagadnánk Pólya György (1945/1957) életművének egyik alapüzenetét, a heurisztika gondolkodásfejlesztő hatását.

Javaslatom, amelyet más formában – 2001-ben, Ambrus Andrásnak írt válaszomban is – megfogalmaztam: a bizonyítások formalizáltsága és deduktív jellege két külön dimenziónak tekinthető, melyeket egymásra vetítve legalább négy kombinatorikai lehetőség adódik. Válaszomban akár idézhettem volna azt is, hogy „a matematikai bizonyítások szigorúsága … nem kapcsolható össze egy bizonyos szimbolikával" (Ambrus, 1995, 73. o.)

- deduktív és formális bizonyítások: ezeket tekinti a szakmai közvélemény elsősorban és minden további jelző nélkül „bizonyításnak"
- deduktív és nem formális bizonyítások: ezek alsó tagozatos kortól elérhetők, voltaképpen a logikai értelemben szabatosnak számító, valamely állítás igazságát megvilágító, legtöbbször egy „Miért?"-kérdésre adott gondolatmenet.
- nem deduktív és formális bizonyítások: logikai értelemben hibás vagy következetlen, de a matematika szimbólumrendszerét intenzíven használó gondolatmenetek. Egyes humoros példái tanulságosak lehetnek az oktatásban: például annak ismert „bizonyítása", hogy 1 egyenlő 2-vel.
- nem deduktív és nem formális bizonyítások: a hétköznapokban, a médiában nagyon sokszor találkozunk a plauzíbilis következtetési szabályok helytelen használatával. A „következmény megerősítése" vagy „előfeltétel tagadása" következtetési sémák (ld. Hársing, 1981), vagy egyszerűen a körbenforgó okoskodások ebbe a körbe tartoznak.

Az interjú-technikai felhasználási lehetősége a matematikai gondolkodás kutatásában

Ambrus András rákérdezett 2001-ben, hogyan látom az interjú-technika felhasználási lehetőségét a matematikai gondolkodás

kutatásában. A doktori disszertációm vizsgálataiban elsősorban nagymintás, papír-ceruza eszközökkel történő adatfelvétel zajlott, így a kérdés a kutatás-módszertani repertoár bővítését és kiegyensúlyozását is felveti.

Cinikus vélemények szerint bizonyos pedagógiai kutatási módszerek használata egyszerűbb, ám emiatt nehezebb a kapott eredmények értelmezése és gyakorlati felhasználása, míg más módszerek kétségkívül elevenre tapintó, releváns eredményeket hoznak, de az objektivitás vagy a mintanagyság problémája miatt a módszertani szigorúság nevében esnek kritika alá. A papír-ceruza kérdőívek kétségkívül az egyszerűen felhasználható, gyorsan nagymintás adatbázist eredményező módszerek közé tartoznak, emiatt az eredmények publikálása és a következtetések levonása fokozottabb körültekintést kíván. Az interjú-módszer fölfutása a hatvanas-hetvenes évekre tehető, és alkalmazása mind a kvantitatív, mind a kvalitatív metodológiát gazdagítja. Lényege a szóbeliség és az interaktív visszacsatolások és elágazások lehetősége.

Tudjuk, hogy egy feladat teljesen más nehézségű lehet, ha papír-ceruza tesztben kerül elénk, és más, ha szóbeli kérdésként. Mindkét esetben egy kontextuálisan és kulturálisan is meghatározott helyzetről van szó (ezt Saxe, Dawson, Fall és Howard (1996) meggyőzően mutatják ki „A matematikai gondolkodás természetében"), vagyis valójában a két feladat nem ugyanazt méri. Akkori kutatásomban az interjúkat post-hoc elemzés céljából vettük fel, amelylyel az írásbeli teszten elért eredményekkel kapcsolatos kérdésekre kerestünk választ.Ehhez hasonló kutatói stratégiát valósítottunk meg Kelemen Ritával és Steklács Jánossal, amikor egy matematikai szöveges feladat hangosan gondolkodtatás melletti megoldását rögzítettük videofelvételre, majd a tanulói tevékenység utólagos elemzését Schoenfeld (1987) videoelemzése nyomán végeztük el (Kelemen, Csíkos és Steklács, 2005).

A hangosan gondolkodtatás módszere ellen szóló legfőbb érv, hogy az emberi artikuláció lassúsága, sőt, a saját gondolkodási folyamataink szavakba öntéséhez szükséges szókincs bizonytalan megléte kérdésessé teszi a kapott eredmények érvényesség. Ugyanakkor a hangosan gondolkodtatás érvényességét támasztja alá,

hogy osztálytermi környezetben is használható módszerről van szó. Ezen felül, tanári oldalról nézve, a tanár feladatmegoldás közbeni hangosan gondolkodása hasznos fejlesztő módszer lehet. Egyúttal egy itthon eddig elhanyagolt kutatási területre, a kidolgozott példák alapján történő tanításra is érdemes ráirányítani a figyelmet. Változatos minőségi szinteken valósítható meg egy matematikai feladat tanulók előtti bemutatása, a megoldás közbeni önreflexió minőségétől vagy akár hiányától függően. Fontoljuk meg, hogy az alábbi, feladatmegoldást kísérő tanári megnyilvánulások milyen mértékben segítik a gondolkodásfejlesztést és milyen mértékben erősítik azt a tanulói meggyőződést, hogy a matematika egyes beavatottak számára való:

(1) „Ha az ábrán behúzzuk az FH átlót, akkor látható, hogy egy paralelogrammát kapunk…"

(2) „Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól kissé eltérő formában? Nem ismersz valami rokon feladatot?"

Nyilván minden olvasónk felismerte, hogy a második változat Pólya György (1945/1957) könyvének belső borítójáról származik A gondolkodás iskolája című könyvéből.

A tanulói szóbeli megnyilvánulások kutatásához ma is gyakran használatos az interjú-módszer. Háromjegyű számok fejben összeadásának vizsgálatára is ezt használtuk (Csíkos, 2016), és sikerült empirikus igazolását adnunk annak az egyszerű ténynek, hogy ugyanaz a teljesítményszint egymástól gyökeresen eltérő stratégiák használatával is előállhat. A fejben számolás stratégiái kapcsán ugyan elvileg lehetőség van az írásos (vagy számítógépes) tesztelési módszer használatára is, de helyesebbnek ítéltük meg, ha a feladatmegoldási teljesítményt és az adott teljesítményhez vezető mentális folyamatok vizsgálatát nemcsak időben, hanem a kérdezés modalitásában is elkülönítjük egymástól. (Ezzel elkerülhetőnek láttuk, hogy a tanulók a fejben számolás mikéntjére vonatkozó kérdést is esetleg tudásmérő kérdésnek tekintsék, és megpróbálják válaszukat valamilyen vélt helyes válasz feltételezése mellett megalkotni.

Nyilvánvaló ugyanakkor, hogy a tanulók szóbeli beszámolói a saját gondolkodási folyamataikról mindig is magukkal cipelik a megfelelő szókincs hiányából adódó problémákat. Mivel például a fej-

ben számolás folyamataival kapcsolatos szakirodalmi terminológia még a pedagógusok részéről sem mindig ismert, a kutató feladatává válik, hogy a tanulói szóbeli megnyilvánulásokat utólag kódolja és értelmezze.

A szemmozgás-vizsgálatok a matematikai gondolkodás kutatásában viszonylag későn, a kilencvenes évektől nyertek teret. Amerikában Mayer és Hegarty, Európában pedig a flamand műhely, elsősorban De Corte és Verschaffel (De Corte, Verschaffel és Pauwels, 1990) számítanak úttörőnek. Magyarországon alapvető, matematikához köthető pszichikus funkciók vizsgálatára Szűcs és Csépe (2004), magasabb rendű matematikai gondolkodási folyamatok kutatásában Csíkos és Steklács (2015) vizsgálatai jelentek meg. A szemmozgás-vizsgálatok előnyei számosak, és a hangosan gondolkodtatással összevetve a legnagyobb erény az objektivitás és a verbális elaborációval lekövethetetlenül gyors folyamatok kutatásának lehetősége. Látszólag paradox módon a végtelenségig kvantifikáltnak számító szemmozgás-vizsgálati módszerekből kvalitatív kutatások is kinőhetnek, ahogyan azt egy rejtvény jellegű szöveges feladat során tapasztalt tanulói a-ha élmény detektálásával igazoltuk.

Elmélet és gyakorlat kapcsolata a matematikatanításban

Megtisztelő volt számomra, hogy a bíráló az álláspontom kifejtését kérte egy olyan problémakörben, amely bizonyára mindenkit foglalkoztat, de amely túl szerteágazó ahhoz, hogy akár csak a megválaszolatlan problémákat itt fölsoroljuk. Egyetértek azzal az állítással, hogy szakadék tátong a pedagógiai elmélet és a gyakorlat között. A matematikadidaktikában sem számít újnak a szakadék leküzdésének vágya, és De Corte (2000) egyenesen a kettő összeházasításának gondolatát veti föl. Nemcsak a kutatók és a gyakorló pedagógusok közötti kommunikáció javítását tűzi ki célul, hanem a kutatások irányára is tesz két javaslatot: a pedagógusok nézeteinek megváltoztatását célzó kutatási eredményekre van szükség, és a kutatások olyan környezetben kell végezni, amely kellően komplex ahhoz, hogy az eredmények érvényessége biztosítható legyen.

Az ökológiai validitás elvét részletesen kifejtettem a pedagógiai kísérletek kutatásmódszertanáról írt módszertani tankönyvemben (Csíkos, 2012).

Az elmélet és a gyakorlat elszigeteltsége a teljes oktatási rendszer működésének velejárója. A probléma részben a személyi feltételekből származik (nagyon kevesen vannak, akik egyszerre képesek a közoktatásban nap mint nap katedrára állni, és ugyanakkor tudományos konferenciákon és folyóiratokban publikálni), másrészt számtalan tényező van, amely akkor is hatna, ha az előbb említett személyi probléma faktor nem létezne.

Annak idején a disszertáció megírása során újra és újra átgondoltam néhány ilyen problémát, és ezek közül kettőt emelek ki. (1) Az egyik probléma, hogy - talán a 60-as, 70-es évek pedagógiai szakkönyveinek hatására - a pedagógiai elmélettől egyre jobb, egyre hatékonyabb módszereket vár az iskola. Véleményem szerint hangsúlyozni szükséges, hogy önmagában egyik módszer sem nevezhető jónak vagy rossznak. Nem lehet tudományosan megalapozott választ adni például arra a kérdésre, hogy melyik módszerrel „kell" a teljes indukciós bizonyításokat tanítani. Könnyen elképzelhető, hogy egy adott iskola két párhuzamos osztályában teljesen más módszerekre van szükség. Az is valószínű, hogy a követelmények, a technikai feltételek vagy az értékelési módszerek megváltozása az alkalmazandó módszerek megváltozását vonja maga után: az elmélet a teljes tanítási-tanulási rendszer összetevőinek egymásra hatását vizsgálja.

(2) A gyakorlat a pedagógiai kutatástól gyakran olyan jellegű kijelentéseket vár, amelyek kutatás-módszertani vagy tudományelméleti értelemben nem számítanak tudományos állításnak. Valószínű, hogy a legtöbb szakértő a gyakorlat számára közvetlenül hasznosíthatónak ítélne egy olyan állítást, hogy „A magyarországi 7. osztályos tanulók 17%-a képes megfordítani Pitagorasz tételét." Az elmélet ilyenkor rögtön megvizsgálja, hogyan épült fel az a reprezentatív országos minta, amely alapján ezt a következtetést levontuk. Az sem mindegy, hogy a mérőeszköztől függően esetleg csak arról van szó, hogy adott négy lehetőség közül a magyar tanulók mintegy egynegyede képes kiválasztani a helyes megoldást

(ez nagyjából a találgatási szintet jelentené), avagy egészen mást jelent, ha egy nyílt végű kérdés után üresen hagyott helyre írja föl a választ a tanuló. Ha tehát precízek, és ami ezzel együtt jár, falszifikálható állításokat megfogalmazók akarunk lenni, akkor sokszor a gyakorlat számára szőrszálhasogatónak tűnő kijelentéseket írunk le.

Az V. Országos Neveléstudományi Konferencia egyik plenáris előadója, David Berliner kifejtette álláspontját arról, hogy szerinte egy kutatócsoport akkor tud egyszerre releváns és tudományosan is megalapozott kutatásokat végezni, ha személyi összetételében ott vannak a gyakorlati pedagógiai tapasztalattal felvértezett kollégák és a szoros értelemben vett akadémiai-egyetemi kutatói szféra képviselői. A gyakorlati tapasztalat ahhoz nélkülözhetetlen, hogy a tervezett kutatás egyszerre megvalósítható és gyakorlatban később jól hasznosítható legyen. Ugyanakkor a tudományos kutatás és közlés szabályait alaposan ismerő, a fogalomhasználatot és az adatelemzést olyan szinten birtokló kutatók is fontosak, akik a szokásosan elvárt iskolai óraterhelés mellett már nem könnyen tudnák tartani a lépést a szakirodalommal és az adatelemzési technikákkal (néha adatelemzési divatokkal). Mindebből egy olyan láncolat bontakozik ki, amelyben az elmélet és a gyakorlat szakemberei között hídként kutatócsoportok jelennek meg, melynek tagjai együttesen mindkét irányban tájékozottak. Azt állíthatjuk tehát, hogy a matematikaoktatásban is jórészt tudományszervezési és infrastrukturális kérdés, hogy az elmélettől a gyakorlattól felé, és ezzel párhuzamosan a gyakorlattól az elmélet felé az információáramlás gördülékeny legyen.

Az elmélet és a gyakorlat közötti információ-áramlás gyorsítását szolgálhatja a tanár-továbbképzések rendszere. Rendkívül jó tapasztalataink vannak arra vonatkozóan, hogy hogyan tudja egymás munkáját inspirálni a több évtizede ugyanabban az iskolában tanító, az új pedagógiai elméletek iránt fogékony tanár és a szakirodalommal lépést tartani igyekvő, de a közoktatás katedrájára nem álló egyetemi oktató.

Köszönetnyilvánítás

Köszönöm Ambrus Andrásnak az inspirációt, amely nem csupán az opponensi bírálatában megfogalmazott észrevételek továbbgondolásának lehetőségében nyilvánult meg, hanem abban is, hogy neveléstudományi kutatóként (bár némi matematikatanári háttérrel) természetesnek érezhettem a csatlakozást a hazai matematikadidaktikus közösséghez.

A tanulmány elkészítését a MagyarTudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Irodalom

Ambrus András (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

Csíkos Csaba (2009). Mentális modellek és metareprezentációk matematikai szöveges feladatok megoldásában. Egy fejlesztőkísérlet elméleti alapjai. In Kozma Tamás és Perjés István (szerk.), *Új kutatások a neveléstudományokban 2008* (109-117. o). Budapest: MTA Pedagógiai Bizottsága.

Csíkos, C. (2016). Strategies and performance in elementarystudents' three-digitmentaladdition. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 123-139.

Csíkos Csaba, Steklács János (2015). Relationships between student performance onarithmeticword problems eye-fixationduration variables and numbernotation (numberwords vs. Arabicnumerals). *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 14,* 43-57.

Csíkos Csaba, Szitányi Judit és Kelemen Rita (2010). Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban: Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. *Magyar Pedagógia, 110,* 149-166.

Csíkos, C., Szitányi, J.,& Kelemen, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word

problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81,* 47-65.

De Corte, E. (2000). Marryingtheory building and the improvement of schoolpractice: A permanent challenge for instructional psychology. *Learning and instruction, 10,* 249-266.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Pauwels, A. (1990). Influence of thesemanticstructure of word problem son second graders' eyemovements. *Journal of Educational Psychology, 82,* 359-365.

Harel, G. (2007). Students' proofschemesrevisited. In P. Boero (Ed.), *Theorems in school: fromhistory, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 61-72). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Harel, G. és Sowder, L. (1998): Students' proof schemes: Research from exploratory studies. In: Dubinsky, E., Schoenfeld, A.és Kaput, J. (Eds.): *Research Issues in Collegiate Mathematics Education* Vol. 7.,American Mathematical Society, Washington, D. C., 234-283.

Hársing Lajos (1981). *A tudományosérvelés logikája.* Budapest: AkadémiaiKiadó.

Johnson-Laird, P. N. (1983). Mentalmodels: *Towards a cognitivescience of language, inference, and consciousness.* Cambridge, MA: Harvard University Press.

Kelemen Rita, Steklács János és Csíkos Csaba (2005). A matematikai problémamegoldást kísérő metakognitív stratégiák a hangosan gondolkodtatás és a videomegfigyelés eszközeivel. *Magyar Pedagógia,* 105, 343-358.

Massa, L. J., Mayer, R. E. (2006). Testing the ATI hypothesis: Should multimedia instruction accommodate verbalizer-visualizer cognitive style? *Learning and Individual Differences, 16,* 321-335.

Mayer, R. E. &Hegarty, M. (1996). The process of understanding mathematical problems. In R. J. Sternberg & T. Ben-Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 29-53). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Pólya György (1945/1957). *A gondolkodásiskolája.* Budapest: Bibliotheca Kiadó.

Saxe, G. B., Dawson, V., Fall, R.,& Howard, S. (1996). Culture and children's mathematical thinking. In R. Sternberg & T. Ben-

Zeev (Eds.), *The nature of mathematical thinking* (pp. 119-144). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Schoenfeld, A. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Szűcs, D., & Csépe, V. (2004). Access to numerical information is dependentonthemodality of stimuluspresentation in mentaladdition: A combined ERP and behavioralstudy. *CognitiveBrain Research, 19*(1), 10-27.

Vidákovich Tibor (2008). A tapasztalati következtetés fejlődése az óvodától a középiskoláig. *Magyar Pedagógia, 108*, 199-224.

Woolfolk, A. H. (1993). *Educational psychology.* Boston: Allyn and Bacon.

Csányi Petra – Fábián Kata – Szabó Zsanett

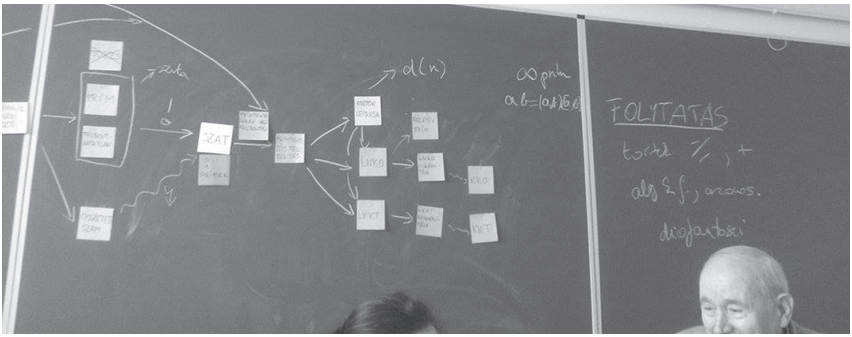
Mitől irracionális a gyök 2?

Kapcsolatunk dr. Ambrus Andrással

Ambrus Andrással először az ELTE-n találkoztunk, amikor Szabó Csaba tanár úrral kutattunk a számelmélet oktatásával kapcsolatosan. Már az első találkozáskor bebizonyosodott számunkra, hogy a matematika-módszertan nagy szakértőjével állunk szemben. Sok éves szakmai tapasztalata nagy segítséget nyújtott munkánk során. Segített például abban, hogy olyan szempontokból is vizsgáljuk a számelmélet tanításának kérdéskörét, amikre elsőre nem gondoltunk.Például tőle tanultunk először mélyebben az agyműködésről és a matematika pszichológiai hátteréről.

Ambrus tanár úr nemcsak szakmai tudásával, hanem emberi hozzáállásával, kedvességével, türelmével is példát mutatott számunkra a tanár-diák kapcsolatról. Mindig volt egy-két kedves mondata hozzánk. Több módszertani konferencián volt szerencsénk együtt részt venni, ahol az ő szakmai és emberi biztatása is segített minket abban, hogy az első előadásaink megállják a helyüket tapasztaltabb előadók között is.

Ambrus tanár úrral és módszertani könyvével az egyetemi matematika szakmódszertan kurzuson is találkoztunk. A jegyzete számunkra nemcsak tanulmányaink, hanem kutatásunk során is hasznos irodalom volt, sokat tanultunk belőle. Óráin különösen örültünk annak, hogy mondandóját rendszeresen saját tanítványaival kapcsolatos példákkal színesítette. Így érezhettük, hogy tényleg fontos az, amit tanulunk. A kötelező ismereteknél sokkal többet kaptunk tőle az órákon. Gyakran elemeztük hallgatótársaink és saját tanítási tapasztalatainkat is közösen, ezáltal hasznos tanácsokat kaptunk egymástól és Ambrus tanár úrtól is. Egyes módszertani kérdéseket a számelméletre specializálva a Tanár úrral közösen is



Köszönjük Tanár úr a sok biztatást és szakmai segítséget! Reméljük, hogy nekünk is jut majd annyi öröm a tanári pályán, amennyi az elbeszélései alapján Önnek jutott.

Matematikatanítással kapcsolatos elveink

Mindhárman kezdő tanárok vagyunk, hiszen még csak az idén kaptuk meg a diplománkat. Így hosszú évek tanítási tapasztalata alapján kialakult matematikatanítással kapcsolatos elvekről nem igazán beszélhetünk. Elképzeléseink viszont vannak arról, hogy hogyan szeretnénk matematikát tanítani és arról, hogy milyen matematikatanárok szeretnénk lenni.

Szeretnénk, ha a diákok nem valami rettenetes és ijesztő szörnyként gondolnának a matematikára és a matekórákra, hanem szívesen mennének be az órákra, örömmel gondolkodnának. Természetesen tudjuk, hogy nem lesz mindenki matematikus és nem lehet mindenki kedvenc tárgya a matek, de szeretnénk, ha a tantárgyak kedvelési skáláján nem az utolsó helyek valamelyikén kullogna a matematika a tanítványainknál.

A gondolkodtatás, gondolkodni tanítás sokkal fontosabb számunkra annál, hogy olyan képleteket tudjanak fejből a tanulók, amiket a függvénytáblában vagy később az interneten is könnyedén megtalálnak. (Az persze fontos, hogy tudják, hogy hol keressék a számukra szükséges releváns, helyes információkat.)

Nagy hangsúlyt fektetünk arra is, hogy a diákok értsék azt, amit

csinálnak. A számelmélettel kapcsolatos kutatásunk során szembesültünk azzal, hogy milyen problémákat tud okozni a későbbi tanulmányok során, ha a diákok csak egy lépéssorozatot tanulnak meg és alkalmaznak mechanikusan anélkül, hogy értenék azt, hogy mit miért csinálnak.

Az egyetemi évek alatt a konferenciákon gyakran hangoztattuk a következő mondatot, amit Vásárhelyi Éva és Vancsó Ödön fogalmaztak meg számunkra: *„Engedményeket kell tennünk a matematikai szabatosság rovására a tanulók fejlettségi szintjétől függően az érthetőség javára."* Ehhez a mondathoz tanárként is tartjuk magunkat. Nem erőltetjük a matematikai precizitást addig, ameddig nem érezzük úgy, hogy a diákok értik, hogy miről van szó. Ha példák, ellenpéldák segítségével megértik az adott fogalmat, definíciót és annak fontosságát, akkor egy idő után ők maguk is egyre pontosabban, precízebben igyekeznek fogalmazni. Előfordul, hogy a tanulók egymást is javítják, ösztönzik a pontosabb megfogalmazásra.

Olyan példákat, szöveges feladatokat, problémákat szeretünk mondani, feladni a diákoknak, amiről azt gondoljuk, hogy valamilyen szempontból közel áll hozzájuk, érdekes számukra. Ehhez persze fontos az is, hogy megismerjük a tanítványainkat és mindig nyitottak maradjunk az új dolgokra.

Egy konkrét kérdés tanításának elemzése

A számelmélet témakör tanításával kapcsolatos kutatásunk során elkezdtük a különböző tankönyveket vizsgálni, hogy megnézzük, hogy hogyan tárgyalják a számelmélet témakört. A vizsgálódás közben pedig kíváncsiak lettünk arra is, hogy a számelmélettel kapcsolatos bizonyítások hogyan szerepelnek a tankönyvekben. Így jutottunk el a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításához.

Ez a bizonyítás különösen fontos szerepet tölt be a középiskolai matematika tananyagban. Egyrészt ez az első eset, amikor irracionális számokkal kapcsolatos bizonyítást látnak a tanulók. Másrészt pedig ez az egyik fő példa az indirekt bizonyítás használatára is.

A NAT azt várja el a diákoktól, hogy ismerjék a bizonyítások-

ban szereplő érveléseket, illetve elvárja a bizonyítások legfontosabb lépéseinek észrevételét, megértését. A középiskolai tankönyvek vizsgálatakor ezeket az elvárásokat vettük figyelembe. A tankönyvekben a hiányzó érvelések, hiányos okoskodások több helyen is szemet szúrtak nekünk. A továbbiakban a különböző tankönyvekben szereplő bizonyításokat fogjuk összehasonlítani, illetve leírjuk, hogy mit és miért fogalmaznánk meg másképp.

Nézzük, hogy a különböző tankönyvekben hogyan bizonyítják be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális. A bizonyítások nem meglepő módon mind úgy kezdődtek, hogy indirekt módon tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális, vagyis felírható törtként így:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Abban viszont már nem volt egyetértés a különböző tankönyvek között, hogy milyen kikötésre van itt szükség. Ezekkel találkoztunk:

- $(a,b) = 1$
- $(a,b) = 1,\ a,b \in \mathbb{Z},\ b \neq 0$
- $b \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ és $(a,b) = 1$
- $a \in \mathbb{N}^+, b \in \mathbb{N}^+,\ (a,b) = 1$
- a és b relatív prím számok és $b \neq 1$
- $a,\ b \in \mathbb{Z}^+$

Annyi egészen biztos, hogy $b \neq 0$ és az is, hogy $a,\ b \in \mathbb{Z}$. Többre azonban úgy gondoljuk, hogy nincs szükség. De nem is igazán a kikötés zavart bennünket a tankönyvek olvasásakor, hanem a folytatás.

A következő két lépés is megegyezett az összes vizsgált tankönyvben. A felírt egyenlet mindkét oldalát négyzetre emeljük, majd beszorozzuk b^2-vel.

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$2b^2 = a^2$$

Ez után kerültek elő a hiányos érvelések. Az egyik legnépszerűbb tankönyvben így fejezték be a bizonyítást:

$$2b^2 = a^2$$

$$\Downarrow$$

$$2|a^2 \Rightarrow 2|a \Rightarrow 4|a^2,$$

$$\text{ha } 4|a^2 \Rightarrow 2|b^2 \Rightarrow 2|b$$

Azt kaptuk, hogy *a* és *b* is páros. Ez ellentmond annak, hogy relatív prímek, tehát az állítás igaz.

Ebből a bizonyításból komoly érvek hiányoznak. A kezdeti feltételeket még szavakba önti, de később a lényegi részt csak szimbólumok sorozatával jelöli. Itt magyarázó szavak helyett ⇒ szimbólumokat találunk. Ez a szimbólum – a matematikai közösség megállapodása alapján – azt jelenti, hogy a ⇒ szimbólum előtt lévő állításból következik a szimbólumot követő állítást. Viszont egy ilyen nyilacskát csupán abban az esetben használhatunk formális, nyomtatott bizonyításban, ha egyértelmű, nyilvánvaló következtetésről van szó. Úgy véljük, hogy ezek a lépések nem minden 10. osztályos tanuló számára egyértelműek.

Két másik tankönyvben már némi szöveges leírás is szerepel a bizonyítás további részében:

a^2 csak akkor páros, ha *a* is páros
Látszik, hogy a^2 páros szám, s ebből következik, hogy *a* is páros szám

Ezek a bizonyítások első olvasásra meggyőzőnek tűnnek, könnyű azt hinni, hogy értjük őket. *A „csak akkor„* és az *„ebből következik, hogy”* megfogalmazások viszont hiába hangzatosak, mégis csupán a ⇒ szimbólum szöveges átiratai.

Úgy gondoljuk, hogy egy középiskolás, a bizonyítások olvasásában még tapasztalatlan olvasó könnyen úgy érezheti, hogy ő az egyetlen, aki nem érti ezt a bizonyítást. Így átsiklik felette, elfogadja értelmezés nélkül. Vagy egyszerűen úgy gondolhatja, hogy ez pontosan úgy néz ki, mint egy jó bizonyítás.

A páros és páratlan fogalmak szerepeltetésével kapcsolatos ellenérzésünk éppen abból fakad, hogy ezek annyira köztudott és elfogadott fogalmak, hogy sokakban nem tudatosul ezen szavak matematikai jelentése. Így a bizonyítás általánosítását nem segíti elő a páros, illetve páratlan kifejezések használata.

A hiányos érvelések mellett a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyításával kapcsolatos egy másik probléma pedig épp az, hogy néhány tankönyv a következőt állítja:

„A fenti módszerrel belátható, hogy minden olyan pozitív a egész szám esetén, mely nem négyzetszám, a $\sqrt{a}$ irracionális szám.”.

Már a $\sqrt{3}$ irracionalitásának hasonló módon történő bizonyításához sem tudnánk használni a páros és páratlan kifejezéseket, hiszen a 3-mal való oszthatóság vizsgálatánál már nem beszélhetünk ilyenről. Ha analógiával megpróbáljuk más számokra is kiterjeszteni ezt a bizonyítást, a 3-ra még rá tudnánk erőltetni a módszert a 3 különböző maradékait vizsgálva, viszont 12-re bár biztosan nem. Hiszen a 12 megbukik annál a kritikus lépésnél, amelynek különböző „átiratait” találtuk meg a tankönyvekben, amellyel próbálják magyarázni, eltusolni a lépés mélységét. Tehát a $2|a^2 \Rightarrow 2|a$ lépés nem általánosítható, így maga a bizonyítás sem általánosítható *„minden olyan pozitív a egész szám esetén, mely nem négyzetszám”*, hiszen 12-re: $12 \mid 6^2$, de $12 \nmid 6$

A többi tankönyv bizonyításában lévő „bűnös lépést” is elemzésre vettük TDK dolgozatunkban.

A bizonyítás teljeskörű vizsgálatához hozzátartozott az is, hogy rávilágítsunk a számkör fontosságára, a számelmélet alaptételének igazságára. Így ellenpéldaként mutatunk egy olyan számkört, ahol a $\sqrt{2}$ nem is irracionális. A részletek, a mélyebb matematikai háttér elemzése bővebben a TDK dolgozatunkban [1] és egy angol nyelvű cikkünkben[2] olvasható.

Egy esettanulmány

A $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása kapcsán közel 100 emberrel készítettünk esettanulmányokat. Az esettanulmányok készítésekor általában mindhárman, de legalább ketten jelen voltunk. Ügyeltünk arra, hogy a kérdéseket, segítő kérdéseket mindig ugyanúgy fogalmazzuk meg, azért, hogy a válaszok később összehasonlíthatók legyenek.

A résztvevőket véletlenszerűen választottuk ki. Közülük körülbelül 20-an középiskolás diákok voltak, 20-an matematika szakos tanárok, 60-an pedig első-, másod-, illetve harmadéves matematika szakos egyetemisták, akik már elvégezték az egyetemi számelmélet kurzust.

Az esettanulmányok indító kérdése az volt, hogy *„Hogyan bizonyítanák be, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális?”*. A bizonyítást egy kivétellel (amikor geometriai bizonyítást hallottunk) mindenki így kezdte:

Indirekt tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ racionális. Írjuk fel, a $\sqrt{2}$-t két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Ezen a ponton a 60 matematika szakos hallgatóból 4 megállt. Nem tudták, hogy mi lehet a következő lépés. Őket egy kis segítséggel rávezettük arra, hogy a négyzetgyököt kellene eltüntetni. Így már eszükbe jutott, hogy négyzetre kell emelni mindkét oldalt.

Emeljük négyzetre mindkét oldalt:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Szorozzunk be b^2-tel.

$$2b^2 = a^2$$

Ennél a lépésnél 5 hallgató állt meg a 60-ból, és ők nem is folytatták a bizonyítást. Olyasmiket mondtak, hogy *„Nem emlékszem rá, hogy hogy volt tovább.”*, *„Most nem tudom, fáradt vagyok.”*.

Sokan itt visszatértek az első sorhoz és kiegészítették annyival, hogy $(a, b) = 1$, mondván, hogy az a és a b relatív prímek. Megmagyarázni viszont nem mindenki tudta, hogy miért van erre szükség. Mások csak arra emlékeztek, hogy itt kell valami kikötést tenni, de arra már nem, hogy mit kell kikötni, maguktól pedig nem tudták kitalálni. Rajtuk kívül pedig voltak olyanok is, akik nem foglalkoztak olyan „*apróságokkal*" mint a kikötés.

A kikötés nehézségeinek leküzdése, vagy a probléma halogatása „*majd a végén kitalálom, hogy mi kell ide*" után legtöbben úgy folyatták, hogy „*Úgy emlékszem, hogy itt volt valami páros vagy páratlan, legalábbis azt hiszem... Sajnálom, nem tudom pontosan.*".

Voltak olyan esettanulmányok, amiket nem egy-egy emberrel, hanem egy kisebb csoporttal végeztünk. Az egyik ilyen alkalommal, amikor öt emberrel beszélgettünk, kérdezgetni kezdtük őket a $2b^2 = a^2$ lépésnél. Arra emlékeztek, hogy ez az egyenlőség már a bizonyítás vége felé volt és ezzel kapcsolatosan kell mondani *valamit,* amitől a bizonyítás véget ér. A csoport szép lassan és eleinte meglehetősen bizonytalanul összerakta a *páratlanszor páratlan* érvelést (bővebben: [1, 2]).

Ennek kapcsán a következő beszélgetést folytattuk le a csoporttal:

– Miért igaz, hogy páratlanszor páratlan az páratlan?

– Mert a $(2k + 1) \cdot (2k + 1)$ is páratlan. – felelték némi gondolkodás után.

– Honnan jött a $2k + 1$?

– Az a páratlan.

– Miért?

– Hát mert tanultuk, hogy az.

– És akkor mi a páros?

– Hát a $2k$.

– Miért?

– Ezt is tanultuk.

– Minden egész szám páros vagy páratlan?

– Persze.

– Honnan tudjátok, hogy csak $2k$ és $2k + 1$ alakú egész számok vannak?

Ezen a ponton erősen elbizonytalanodott a csoport. Csak hosszas gondolkodás és további kérdések után mondták ki a kulcsszót, hogy itt a maradékos osztás kap szerepet.

Az esettanulmányok azon sikeres résztvevői, akiknek sikerült hiánytalanul bebizonyítaniuk, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális, a következőképp érveltek:

„Tegyük fel, hogy a $\sqrt{2}$ felírható két egész szám hányadosaként:

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

Mindkét oldalt emeljük négyzetre:

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

Szorozzunk be b^2–tel:

$$2b^2 = a^2$$

Írjuk fel mindkét oldalt prímek szorzataként. A számelmélet alaptétele alapján a prímtényezős felbontás egyértelmű és a számelmélet alaptétele miatt a négyzetszámok prímtényezős felbontásában minden prímtényező páros kitevőn szerepel. Így a 2 a bal oldalon páratlan, a jobb oldalon pedig páros hatványon szerepel, ami ellentmondás. Tehát a $\sqrt{2}$ irracionális."

Az esettanulmányok során beigazolódott az a gyanúnk, hogy a tankönyvi bizonyítások nem annyira egyértelműek, mint amilyennek elsőre tűnnek. A legtöbb megkérdezett tanuló a bizonyítás első néhány lépéséig jutott csak el, tehát pont a gondolatmenet lényegét nem érti. A kisebb csoportokon végzett esettanulmányok általában jobban sikerültek. Előfordult, hogy mondtak korrekt bizonyításokat is, de ezek csak egyedi esetek voltak. Tehát nem csak a mi benyomásaink szerint, hanem az esettanulmányok eredményei alapján is megállapíthatjuk, hogy a tankönyvi bizonyítások nem érik el azt a célt, hogy a segítségükkel a tanulók megérthessék a bizonyítások főbb lépéseit.

Az esettanulmány után egyik volt csoporttársunk elvégezte a kísérletünket abban az iskolában, ahol tanít, és témavezetőnknek,

Szabó Csabának írt levélben számolt be róla:

„Kedves Tanár Úr!

Beszélgettem XY-nal (ő is az egyetemen végzett, matek majorral, csak pár éve), és ott adtuk fel a $\sqrt{2}$ bizonyítását, mikor odaértünk, hogy páros. Előjött a prím, a felbonthatatlan, az egész és a páros számok fogalma, amikben ezek után már nem is vagyunk biztosak. Megkérdeztem, mik a párosak, és először azt mondta, hogy amik 0, 2, 4, 6, 8-ra végződnek. Aztán mondta ő is a kettővel való osztható-ságot. Onnan meg már jött a SZAT. De a $\sqrt{2}$ esetén, ha $b = 1$, akkor $\sqrt{2} = a$, ami eredetileg egész volt. Na de akkor mik is a páros számok? A gyök kettő páros? Félelmetes ebbe belegondolni. Y azt mondta, maradjunk inkább annál a bizonyításnál, amikor a négyzet átlójára méregetjük az oldalt. :) Holnap kérdezem a következő matekost, csak ők most szóbeliztettek.

Üdvözlettel:"

A beígért másnapi levél:

„Kedves Tanár Úr!

Ma megkérdeztem a másik kollégát is. Egyből azt mondta a páros számra, hogy kettővel osztható. A gyök kettő bizonyításánál azt mondta, hogy akkor valahogy ki kéne játszani, hogy b ne legyen 1. Azt mondta, tudjuk, hogy $1 < 2 < 4$. Vonjunk gyököt és akkor beszorítottuk két egymást követő egész közé, így kizártuk a $b = 1$ esetet. Erre jött egy harmadik kolléga, vele együtt már majdnem teljes volt a természettudományi munkaközösség. Ő 4 év múlva megy nyugdíjba, de azt mondta, ezen még nem gondolkodott el. Arra jutott, ha $b = 1$ akkor a^2 egy páros szám, SZAT miatt akkor b is páros. Viszont akkor azt kapjuk, hogy $2 = a^2$. Bal oldal csak 2-vel osztható, jobb meg 4-gyel, így nem lehet egyenlő, így is megbukik az indirekt bizonyítás. Közben a magyar-töri munkaközösség irigykedve figyelt, hogy a matekosok egy probléma körül hogy össze tudnak ülni, ők meg minden apróságon veszekednek. Ez a ,,feladvány' külön közösségösszekovácsolónak is beillett, ezért külön köszönet Önnek!

Szép hétvégét!

Üdv.:"

Összességében elmondható, hogy a számelmélet alaptételére hi-

vatkozva korrekt, rövidebb, érthetőbb és könnyebben általánosítható a $\sqrt{2}$ irracionalitásának bizonyítása.

Irodalomjegyzék

[1] Csányi Petra – Fábián Kata – Szabó Zsanett, Mitől irracionális a $\sqrt{2}$?, http://web.cs.elte.hu/~csaba/tdk/tdk4.pdf: TDK dolgozat, 2016

[2] Petra Csányi – Kata Fábián – Csaba Szabó – Zsanett Szabó – Éva Vásárhelyi, Numbertheory vs. Hungarian highschool textbooks II.: $\sqrt{2}$ is irrational, Teaching Mathematics and Computer Science 14/2 (2016), 139–152.

Danyi Béla

Kapcsolatom Ambrus Andrással

Ambrus tanár úrral az ELTE matematikatanári mesterszakján találkoztam először. Szakmódszertani kurzusokat tartott nekünk három féléven keresztül. Az első benyomásaimra még most is emlékszem:

„Végre egy tanár, aki ránk, leendő tanárokra kíváncsi."

Az első szakmódszertani óra után tudtam, hogy mind szakmailag, mind emberileg nagyon sokat tanulhatok a tanár úrtól. Elsőként ő volt az, aki nyitott és őszinte személyiségével rendszeresen késztetett minket módszertani diskurzusokra. Engem főként az motivált, hogy mennyire kíváncsi ránk, mennyire őszintén szeretne megismerni minket.

Ambrus tanár úron az első órától kezdve érződött, hogy diákok között éli a hétköznapokat nagyon sok éve. A felénk mutatott érdeklődése, empátiája és a velünk megosztott rengeteg személyes tapasztalata hatott rám talán leginkább a mesterképzés elején. Úgy éreztem, hogy a tanár úr végre teret enged a módszertani vitáknak, kíváncsi a mi tapasztalatainkra, és ami még fontosabb, ő is szeretne tőlünk tanulni valamit. Utóbbi tanúskodott számomra a tanár úr mérhetetlen hivatástudatáról és alázatáról a tanári pálya iránt.

Az Illyés Sándor Szakkollégiumban végzett tanulmányaim során is sok segítséget kaptam tőle. Két féléven keresztül, mint konzulens segítette a szakkollégiumi munkám. Neki köszönhetően egy félévig a problémamegoldás Pólya György–féle fázisaival, illetve annak gyakorlati tanulmányozásával foglalkozhattam, majd az azt követő félévben a valószínűségszámítás témakörének általános iskolai feldolgozásában, illetve az iskolai gyakorlat során ta-

pasztaltak értékelésében volt segítségemre. A tanár úr tanácsára mindkét munkámban az elméleti megközelítés helyett igyekeztem a gyakorlati oldalát megragadni az egyes témáknak. Ez a szemlélet a tanítási gyakorlataim során is irányadóként szolgált.

Az Ambrus-féle módszertani óráknak több visszatérő gondolata is volt. Számomra ezek mindegyike egy, az enyémhez közelálló tanári szemléletet tükröztek. Ennek a szemléletnek két pontját emelném ki. Számomra az egyik legmeghatározóbb gondolat, hogy akármilyen kreatív, újszerű és interaktív órát tervezünk, ha csak kevés jut el az üzenetünkből a tanítványokig, akkor nem sok értelme volt. A tanár úr gyakran hangsúlyozta, hogy már az óra tervezésekor is az osztályra, a diákokra kell építeni, nem elég csak a tananyagot összerakni.

„Gyerekeket tanítunk vagy matematikát?"

Egy másik visszatérő gondolat volt az előbb idézett mondat. A tanár úr ezen mondata mindig arra emlékeztet, hogy tanárként nem elég tudni a matematikát, azt át is kell tudni adni a diákoknak. A tanár közvetít a diákok és a matematika között, így, ha a tanár csak a matematikával törődik, a diákok előbb-utóbb elvesznek. Ez a gondolat tulajdonképpen Ambrus tanár úr jelenléte által töltötte meg mindegyik szakmódszertani órát.

Az Ambrus tanár úr által közvetített pedagóguskép nagyon meghatározó volt számomra az elmúlt néhány évben, ezért ezútonis szeretném megköszönni neki a több éves közös munkát, az órák utáni beszélgetéseket, a személyes tapasztalatokat, a szakmai tanácsokat és az összes szakmai kérdésben folytatott diskurzust.

Egy pályakezdő pedagógusképe

Végzős egyetemista hallgatóként még nem rendelkezem nagy tanítási tapasztalattal, mégis azt gondolom, hogy az Ambrus tanár úrnál végzett módszertani kurzusok és az egy féléves szaktárgyi tanítási gyakorlat alatt megfogalmazódtak bennem azon alapelvek, melyeket matematikatanárként képviselni szeretnék.

A matematikatanítás során alapvetően három tényező egymáshoz képesti viszonya az, mely befolyásolhatja a tanítási folyamat sikerességét: a diák, a tanár és a matematika.

Véleményem szerint a matematika (és alapvetően minden más tudomány) tanításának egyik alapvető feltétele, hogy a tanár kellő elhivatottsággal rendelkezzen a matematika és a tanítás iránt. Enélkül a tanár nem tud hiteles lenni a diákok szemében. Az elhivatottság mellett a maximális szakmai felkészültséget is elengedhetetlennek tartom. Ez nem azért fontos, mert a tanár sosem hibázhat, vagy sose mondhatja azt a diákjainak, hogy *„ezt most nem látom át teljesen, de holnapra utána nézek és újra átgondolom*". Ez sokkal inkább azért fontos, mert minél felkészültebb egy tanár a matematikában, annál tudatosabbá tud válni annak tanításában. A tanárnak mindig látnia kell, hogy hova szeretne eljutni egy-egy óra vagy tanítási folyamat végén. A felkészültség és tudatosság mértéke befolyásolja azt is, hogy mennyire tud a tanár rugalmas lenni a saját tervével kapcsolatban és mi történik például egy diák váratlan kérdése esetén.

A matematika és a diákok között a tanár a közvetítő, ezért a matematikatanítás sikerességét sokszor a tanár-diák viszony minősége határozza meg. Leendő matematikatanárként egy olyan tanár-diák viszonyt tudok elképzelni, melyben tényleges partnerség áll tanár és diák között. A matematikaórát egy kölcsönös tanítási-tanulási folyamatként képzelem el, ahol a diákok mernek kérdezni tőlem, illetve egymástól, mernek próbálkozni és hibázni is. Úgy gondolom, hogy egy jól sikerült matematikaórán a tanár legalább annyit kell tanulnia a diákjaitól, illetve diákjairól, mint fordítva. A matematika órákat egyfajta „együtt-gondolkodás" formájában képzelem el, ahol a tanár kérdésekkel vezeti a diákjait. Fontosnak tartom, hogy a matemati-

katanítás ne csupán definíciók, illetve tételek közléséről, és feladatok megoldásáról szóljon, hanem arról, hogy együtt gondolkodunk egy adott matematikai problémán, együtt próbáljuk megfejteni a nehézségeitése egymás ötleteire támaszkodva igyekszünk közelebb jutni aprobléma megértéséig és megoldásáig. Én elsősorban ezt a szemléletet szeretném átadni a diákjaimnak a matematikaórákon. Véleményem szerint kevés motiválóbb tényező van egy matematikaórán a diákok számára, mint mikor érzik, hogy részesei egy folyamatnak, rájuk is számít a tanár, nélkülük nem kerek a gondolatmenet, kíváncsi rájuk a tanár és a tanár is tanulni szeretne tőlük.

A matematikaoktatás harmadik fő komponense a diákok és a matematika viszonya. A diákok matematika iránti érdeklődése nélkül nehéz érdemben matematikát tanítani. A diákok matematika iránti motivációját belsővé kell tenni. Az utóbbi néhány évben kiemelten foglalkoztam ezzel a témával, többek között Ambrus András tanár úr vezetésével, és arra jutottam, hogy az egyik leghatékonyabb mód a motiválásra, ha az órákat merjük a diákok ötleteire, kérdéseire, érdeklődésére és eddigi tapasztalataira építeni. Ez teljes mértékben megköveteli a korábban említett szakmai felkészültséget és tudatosságot a tanár részéről, de sokszor azt a könnyebbséget is maga után vonja, hogy a diákok szinte automatikusan bevonódnak az óra folyamatába. Eddigi tanítási tapasztalataim során a *„Kinek? Mit? Hogyan? Miért?”* négyes megválaszolására törekedtem az órák tervezésekor. Ezek közül kiemelkedően fontosnak tartom a *Kinek? és Hogyan?* kérdéseket. Ambrus tanár úr szakmódszertani óráin fogalmazódott meg bennem, hogy az egyik képesség, amit szeretnék elsajátítani az évek során, hogy miként tudok előre megtervezni egy matematikaórát úgy, hogy azt a diákok is formálni tudják az óra közben, miközben, a tanár közvetítő, illetve irányító szerepet játszik.

Leendő tanárként úgy gondolom, hogy a matematikatanítással kapcsolatos alapelveknek folyamatosan kell bővülnie, illetve formálódnia az évek során. Saját magamban és leendő diákjaimban is azt a szemléletet helyett "igyekszem majd erősíteni, hogy merjük megosztani egymással a tapasztalatainkat és kérdéseinket, és merjünk foglalkozni kezdetben nehéznek tűnő problémákkal is.

Kísérletezés a matematikaórán

A szaktárgyi tanítási gyakorlatom során valószínűségszámítást tanítottam egy 33 fős 8. osztályban. Ambrus tanár úr segítségével a gyakorlattal párhuzamosan ennek a témának a feldolgozását tűztem ki célul, melynek részét képezte a valószínűségszámítással kapcsolatos iskolai kísérletezések körüljárása. Azt gondolom, hogy az általános iskolai matematikaoktatás során a pedagógus egyik célja és egyben eszköze lehet az élményszerű, felfedeztető tanulás. A diákok motiválása, érdeklődésük felkeltése legalább annyira fontos kell, hogy legyen, mint matematikai eszköztáruk bővítése. Véleményem szerint a diákok motiválásának egyik leghatékonyabb módja, ha bevonjuk őket a közös gondolkodásba, ha éreztetjük velük, hogy rájuk is szükség van ahhoz, hogy „megfejtsük" és megértsük a matematikát, mindezt játékos formába öntve.

A diákok bevonásának egyik módja lehet a tanórai kísérletezés. A kísérletezés fontos részét képezi a hipotézisállítás. A diákok a saját hipotézisük által vonódnak be a folyamatba. Érdekeltté válnak a problémában és ez belső motivációs erővel is bír. A hipotézisállítás fázisának csoportdinamikai szempontból is nagy jelentősége van. A csoportban történő gondolkodás, az osztálytársakkal való együttműködés, az eltérő ötletek és megoldások nyílt kommunikálása és az esteleges viták az osztályközösséget formálják, mindamellett, hogy segítik az osztályon belüli tudásmegosztást, mely a tanulási folyamatnak képezi fontos részét.

Az alábbiakban olyan feladatokat gyűjtöttem össze, melyek a valószínűségszámítás témakörének tanítása során a kísérletezésre adhatnak lehetőséget. A feladatok egy részét a szaktárgyi gyakorlat során meg is csináltuk az osztályban, így az egyes feladatokat rövid reflektálás is követi, melynek célja a gyakorlati tapasztalatok összegzése, illetve a lehetséges továbbgondolások megfogalmazása. A feladatok nagy mértékben építenek a diákok saját élményeire, észrevételeire és teret engednek a feladatok osztályon belüli megvitatására is.

A feladatok megfogalmazása a tanárok munkáját segíti, sok helyen szóbeli utasítások is megjelennek, a szövegezés csak részben

használható szó szerint az órai feldolgozás során. Lehetőség van az egyes feladatok oly módon történő átfogalmazására, hogy otthoni páros/csoportos munka formájában is feldolgozhatók legyenek. Ezekkel kapcsolatban a feladatok után teszek egy-egy rövid megjegyzést. A feladatokhoz hozzátartoznak a diákok által megfogalmazott hipotézisek is, melyeket a feladatok szövegezése nem tartalmaz, a tapasztalatok között viszont röviden ezek is említésre kerülnek majd.

F1. (Tapasztalati valószínűség fogalma)

Alkossatok párokat! Páronként dobjatok fel egy szabályos dobókockát 30-szor és jegyezzétek fel a 6-os dobások számát. A kísérlet elvégzése előtt fogalmazzátok meg, hogy milyen eredményt vártok a kísérlettől!

A párok adatait a kiosztott táblázatban összesítjük! Sorban haladva minden pár diktálja be, hogy 30 dobásból hányszor dobtak 6-ost. Minden páros után állapítsuk meg, hogy az addigi dobások számának hányadrésze volt 6-os, azaz adjuk meg a 6-os dobások és az összes dobás számának arányát!

Dobások száma	30	60	90	120	150	...
Gyakoriság						...
Relatív gyakoriság						...
Tizedestört alak						...

Figyeljétek meg a relatív gyakoriság változását a dobások számának növekedésével! Mit tapasztaltok? Megfigyeléseteket fogalmazzátok meg saját szavaitokkal!

Tapasztalatok, továbbgondolási lehetőségek

Ezt a feladatot a témakör első óráján végeztük el a diákokkal az alapfogalmak feldolgozását követően, így ez a feladat az új fogalmak azonosítására is lehetőséget ad. A feladat nagyon jól működ-

dött, a diákokat teljes mértékben sikerült bevonni, és azáltal, hogy páronként bővítettük a közös adathalmazunkat, a táblázat kitöltése során is figyeltek a diákok. A feladatot a diákok tevékenységére építettem, a táblázat elemzését, a tanulságok megfogalmazását is a diákok végezték.

A hipotézisállítás során a diákok többsége intuitív módon azt várta, hogy a dobások kb. 1/6 részében dobnak hatost. Itt nem is várható nagy eltérés a diákok között, mert a dobókockával, az egyes dobások gyakoriságával kapcsolatban nagyon sok tapasztalatuk lehet például a dobókockás társasjátékok kapcsán. A feladatban konkrétan a hatos szám dobásának relatív gyakoriságát vizsgáltuk.

Érdemes azonban rákérdezni, hogy mi lett volna, ha másik számot választunk. A relatív gyakoriság kiszámítása után fontos, hogy a diákok fogalmazzák meg tapasztalatokat. Emellett nagyon fontos visszatérni a diákok által megfogalmazott hipotézisekre is, hiszen így kap minden diák visszacsatolást saját korábbi feltevésére, enélkül lényegét veszti a kísérletezést megelőző hipotézisállítás fázisa, mely a diákok bevonását segíti.

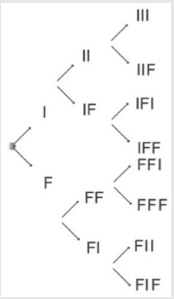
A fenti feladat a tapasztalati valószínűség fogalmának bevezetésére szolgál. A későbbiekben használt valószínűségfogalom már elválik a kísérletek elvégzéséhez kötődő fogalomtól. Ezt a témakör tanítása során érdemes többször tudatosítani a diákokban is.

A feladat lehetőséget ad arra is, hogy otthoni feladatot adjunk a diákoknak különböző események tapasztalati valószínűségének meghatározásához. Itt célszerű lehet olyan kísérletet, illetve eseményeket választani, melyeket a későbbiekben is szeretnénk használni, ezzel is segítve a tanulási folyamat későbbi fázisát. Egy ilyen feladat lehetne például azon esemény vizsgálata, hogy két kockával dobva a dobások összege osztható 3-mal, vagy két kockával dobva a dobások szorzata páratlan. Adhatunk olyan otthoni feladatot is, melyben az osztályt több csoportra osztjuk úgy, hogy mindegyik csoport más-más eseményt vizsgál, egy csoporton belül mindenki a saját eseményének tapasztalati valószínűségét határozza meg, mindenki a saját eseményével kapcsolatban fogalmaz meg hipotézist.

F2. (Játék érmével és a döntési fa)

Két csoportra osztjuk az osztályt. A két csoport felváltva játszik. Az egyik csoport minden tagja kézbe vesz egy érmét és feláll vele a helyén. A csoport minden tagja egyszerre dob egyet az érmével. Aki fejet dobott, az leül, aki írást, az állva marad. Ezután a még állva maradt csoporttagok újra dobnak egyet az érméjükkel. A játék akkor ér véget, amikor 0 vagy 1 játékos marad állva. Ezután ugyanezt eljátssza a másik csoport is, addig az első csoport tagjai ülve maradnak. Az a csoport nyer (vagy az a csoport a szerencsésebb), amelyik több dobásig jut el a játék során. (Ha van egy-egy „legszerencsésebb" tag a két csoportban, akkor köztük még lejátszható egy páros játék.)

Vonatkoztassunk el a játéktól. Dobjunk fel egy érmét egymás után háromszor és sorban írjuk fel a három dobás eredményét. Ábrázoljuk a lehetséges kimeneteleket döntési fával:



1. ábra: Döntési fa

Hol láthatók az ábrán a kísérlet lehetséges kimenetelei? A döntési fa felhasználásával határozd meg a következő események valószínűségét!

a) P(a kísérlet során végig írást dobok)=
b) P(a kísérlet során pontosan két írás lesz)=
c) P(lesz fej a dobások között)=
d) P(egymás után lesz két fej)=
e) P(a második dobás különbözik az elsőtől)=
f) P(egymás után nem dobok azonosat)=

Tapasztalatok, továbbgondolási lehetőségek

Az egyik legfontosabb tapasztalat ezzel a feladattal kapcsolatban, hogy a diákok teljes mértékben bevonódtak és ez a játék utáni megbeszélésre is kiterjedt. A diákok élvezték a tanóra közbeni játékos, versenyhelyzetet is teremtő, kicsit megmozgató feladatot. Ezt a feladatot az óra elején játszottuk el a diákokkal, ami az egész órára jó hatással volt. A játék egy másik célja (a motiválás és az egymásra hangolódás mellett) az volt, hogy a diákok megismerkedjenek egy új eszközzel, a döntési fával. Ez az egy példa persze nem elegendő ahhoz, hogy ez a módszer teljesen beépüljön a diákok eddigi eszköztárába, de ahhoz talán igen, hogy felismerjék, ha a későbbiekben előkerül egy feladat megoldása kapcsán, vagy akár a gráfelmélet egyes területein. A feladat azon része, mely három egymás utáni dobás eredményét vizsgálja, lehetőséget ad a kísérlet, a kimenetel és az esemény fogalmak elmélyítésére azáltal, hogy az eddigiektől kicsit eltérő feladatban kell őket azonosítani.

A fenti játéknak számos további formája használható. Fontos viszont megjegyezni, hogy a döntési fa felrajzolása annál nehezebbé és időigényesebbé válhat, minél több a kísérlethez tartozó elemi események száma. A játék tehát jól eljátszható két kockával, két érmével, vagy egy kockával és egy érmével is, de a feladat további elvégzéséhez nem biztos, hogy a döntési fa a legpraktikusabb eszköz. A döntési fa felrajzolása illetve az egyes kísérletekhez tartozó események valószínűségének meghatározásához tartozó feladatrészek viszont alkalmasak otthoni munkára is.

A döntési fa méretéből, a felrajzolás időigényéből adódó nehézségek kiküszöbölésének egyik módja lehet, ha az órán a diákok irányításával a tanár végzi a táblánál a rajzolást. A közösen elkészített döntési fa elemzése végén pedig a diák kapnak egy-egy előre elkészített, nyomtatott példányt, amit be tudnak ragasztani a füzetükbe. Ennek egyik előnye, hogy a diákok számára később is sokkal átláthatóbb és így talán használhatóbb lesz az ábra, másrészt segíti, hogy a diákok együtt tudjanak haladni az órán. A döntési fa saját kezűleg történő elkészítése pedig otthoni munkaként feladható egy új feladat kapcsán, melyhez az órán adott minta segítségül is szolgál.

F3. (Kísérletezés két érmével)

Alkossatok párokat! Páronként dobjatok fel két érmét 30-szor és jegyezzétek fel a dobások eredményeit (két fej, két írás, egyik fej és másik írás, egyik írás és másik fej)! Az osztály egyik fele két azonos, a másik fele két különböző érmével dolgozzon!

A kísérlet elvégzése előtt állítsunk hipotézist! Mit gondoltok, a dobások kb. hányadrészében következik be a vizsgált esemény?

Az azonos, illetve különböző érmével kísérletezők eredményeit külön összesítjük a kiosztott táblázatokban! Sorban haladva minden pár diktálja be, hogy 30 dobásból hányszor dobtak különbözőt a két érmével. Minden páros után állapítsuk meg, hogy az addigi dobások számának hányadrészében dobtunk különbözőt a két érmével, azaz adjuk meg az esemény relatív gyakoriságát!

Dobások száma	30	60	90	120	150	...
Gyakoriság						...
Relatív gyakoriság						...
Tizedestört alak						...

Figyeld meg a relatív gyakoriság változását a dobások számának növekedésével! Mit tapasztalsz? Fogalmazd meg saját szavaiddal! Vesd össze az eredményeket a hipotézisekkel!

Mindkét csoportban annak az eseménynek a valószínűségét vizsgáltuk, hogy a két érmével különbözőt dobunk. Hogyan viszonyul egymáshoz a két csoport eredménye? Milyen következtetést tudunk levonni?

Tapasztalatok, továbbgondolási lehetőségek

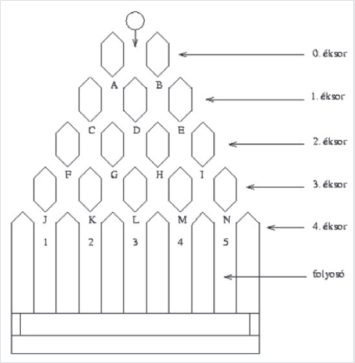
Ezt a feladatot az órán másként végeztük el, mindenki két különböző érmével dobott és csak azon eseményt kellett figyelni és feljegyezni, amikor különbözőt dobtak. A fenti változatot több

szempontból is hasznosabbnak tartom. Egyrészt azáltal, hogy minden dobás eredményét feljegyeztetjük velük, egy olyan adathalmazt kapunk, mely lehetővé teszi más események tapasztalati valószínűségének vizsgálatát is. Másrészt pedig azáltal, hogy az osztály egyik fele két azonos érmével dob, kísérleti úton tudjuk megmutatni a diákoknak, hogy habár két azonos érmével végezzük a kísérletet, a vizsgált esemény tapasztalati valószínűsége nem változik. Erre a megállapításunkra támaszkodhatunk például akkor, amikor a fenti kísérlet lehetséges elemi eseményeit soroljuk fel, ahol pedig megkülönböztetjük az *FI* és *IF* lehetséges kimeneteleket.A kísérlet elvégzése után számolás útján határoztuk meg a fenti esemény valószínűségét. Ez újabb lehetőséget ad arra, hogy szétválasszuk a különböző valószínűség-fogalmakat.

Az eredeti órán csak szóban tettem fel a kérdést, hogy mit gondolnak, két azonos érmével végezve a kísérletet, mit kaptunk volna? Kihasználtuk-e bármikor a kísérlet során, hogy különbözőek az érmék? A tapasztaltom szerint ez a megközelítés azt az érzést keltheti a diákokban, hogy rajtunk múlik, hogy figyelembe vesszük-e az érmék típusát, és ezáltal változhat a kísérlet eredménye.

A feladat elvégzése előtt állított hipotézisek alapján annak az eseménynek a valószínűsége, hogy két érmével dobva a két érmével különbözőt dobunk: 1/2 vagy 1/4 vagy 1/3. Számomra ez is azt jelzi, hogy fontos szerepe van a hipotézisállításnak. A diákok meg is indokolták, hogy miért ezek lesznek az értékek, ami pedig azt tükrözi, hogy ténylegesen elgondolkodtak a problémán, bevonódtak a feladatba. Nem baj, ha nem teljesen hibátlan a gondolat, a lényeg, hogy sikerült bevonni a diákokat.

F4. Galton-deszka (demonstrációs eszköz)



2. ábra: Galton-deszka

Az itt látható eszköz az ún. Galton-deszka. Ez a demonstrációs eszköz teljesen egyforma ékekből és folyosókból áll. Ha valamelyik fenti vagy oldalsó lyukból elindítunk egy golyót, az az ékeken ütközve valamelyik folyosóba érkezik meg. Az ékek speciális tulajdonsága, hogy egyenlő eséllyel (1/2 valószínűséggel) terelik a golyót jobbra, illetve balra.

Indítsunk egymás után több golyót a felső nyíláson át! Figyeljük meg, hogy miként töltik fel az egyes folyosókat! Mit gondoltok, melyik folyosóban gyűlik össze a legtöbb golyó? A hipotézisek megfogalmazása után többször egymás után végezzük el a kísérletet 30 golyóval! A kísérlet eredményét vessük össze a hipotézisekkel!

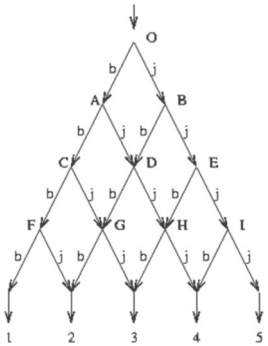
Még egyszer végezzük el a kísérletet, közben figyeljük meg a golyók lehetséges útvonalát, és határozzuk meg az egyes folyosókba való „megérkezés" valószínűségét!

Tapasztalatok, továbbgondolási lehetőségek

Az órán lehetőségem volt bemutatni a diákoknak egy kézzel készített Galton-deszkát. Ez nagy mértékben megkönnyítette a feladat bevezetését és a demonstrációs eszköz működési elvének magya-

rázatát. A feladatban szereplő kísérletet néhány diák bevonásával mutattam be többször egymás után, majd a kísérlet eredményeit összevetettük a gyerekek által állított hipotézisekkel. Többféle hipotézis megfogalmazódott: mindegyik folyosóban ugyanannyi golyó lesz, a középső folyosóban lesz a legtöbb golyó, a három középső folyosóban lesz a legtöbb golyó.

A kísérlet elvégzése után érdemes a diákokkal megfogalmaztatni, hogy ebben a kísérletben melyek az elemi események. Várhatóan az egyik válasz az lesz, hogy az egyes folyosókba való megérkezések. Ez a válasz teljesen helytálló. A probléma abban rejlik, hogy ha így választjuk meg az elemi eseményeket, akkor nem tudjuk alkalmazni az általános iskolában használatos „*kedvező elemi események száma / összes elemi esemény száma*" alakú összefüggésünket, ugyanis ez megköveteli, hogy minden elemi esemény azonos valószínűséggel következzen be. Márpedig az egyes folyosókba való megérkezések nem egyenlő valószínűségűek. A cél tehát az, hogy rávezessük a diákokat arra, hogy a golyó lehetséges útvonalai lesznek a megfelelő elemi események. Az alábbi ábra az egyes folyosókba vezető útvonalak számának megszámlálásában lehet a diákok segítségére.



3. ábra: Galton-deszka elemző ábrája

Az ábra alapján egy-egy útvonalat balra és jobbra irányok egy fix hosszúságú sorozatával tudjuk jellemezni. Abba a folyosóba esik bele egy adott golyó a legnagyobb valószínűséggel, amelyikhez a legtöbb úton tud eljutni. Ez azt is jeleni, hogy a „*legvalószínűbb folyosóba*" esik a legtöbb golyó.

Az útvonalak leszámlálása egy olyan kombinatorikai probléma, mely már 7. osztályban előkerülhet. Ez lehetőséget ad arra is, hogy ezt a feladatot kicsit más formában korábban megoldjuk a diákokkal, és amikor elérünk ehhez a konkrét feladathoz, visszautalhatunk rá és felhasználhatjuk az ottani eredményeket.

A Galton-deszka szimuláció formájában is bevihető az órára. Az alábbi internetes oldalon elérhető egy olyan szimuláció, mely részben pótolni tudja az valódi eszközt. (https://phet.colorado.edu/hu/simulation/plinko-probability) A felület két részből áll; egy bevezetőből, mely a kísérlet elvégzését szimulálja, illetve egy laborból, ahol különböző paraméterek változtatásával tudjuk variálni a problémát. A laborban változtatható például a folyosók száma és az ékek balra, illetve jobbra történő eltérítésének valószínűsége. A szimuláció nagy előnye, hogy a diákok otthoni feladatmegoldás céljából is tudják használni.

Érdemes megemlíteni, hogy a feladat nagyon jó kapcsolódási pont a Pascal-háromszög témaköréhez. Az egyes elágazási pontokhoz vezető útvonalak számát felírva éppen a Pascal-háromszög számait kapjuk. Ezt a feladatot érdemes lehet feladni a diákoknak órai feladatként is, megalapozva ezzel a középiskolában is megjelenő témakört.

Felhasznált irodalom, tankönyvek, linkek

Csahóczi, Csatár, Kovács, Morvai, Szeredi, Széplaki. *Matematika 8. (AP-080808)* Budapest: Apáczai Kiadó.

Csahóczi, Csatár, Kovács, Morvai, Szeredi, Széplaki. *Matematika feladatgyűjtemény 8.(AP-080809)* Budapest: Apáczai Kiadó.

Ambrus (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Budapest: Eötvös Kiadó.

https://phet.colorado.edu/hu/simulation/plinko-probability

https://www.komal.hu/cikkek/valszam/valszam3.h.shtml

Problémamegoldás tanítása tanítóképzős hallgatóknak

•

© Debrenti Edith
PKE Nagyvárad, Gazdaság és társadalomtudományi Kar
edit.debrenti@gmail.com

„Ha sorrendbe kellene állítanom, hogy a matematika megszerettetésében mi a fontosabb: a jó cél, a jó módszer vagy a jó tanár, akkor a tanárt tenném az első helyre... A jó tanárnak nagyon kell ismernie a szaktárgyát, nagyon kell szeretnie a diákokat tanítani, de mindenekelőtt kellő lelki erővel, kultúrával és pszichológiai belátással kell rendelkeznie ahhoz, hogy ne magát, hanem a megoldandó problémát állítsa a tanítási munka középpontjába, hogy hagyja a diákjait önállóan kutatni, fölfedezni és igazán tudjon örülni annak, hogy valaki az ő segítsége nélkül- vagy észrevétlen segítségével- jutott el a megoldáshoz."
(Pólya György)

1994-ben, egyetemista koromban kolozsvári hallgatóként egy nyári intenzív kurzuson vehettem részt az ELTE-n. Sok tanárt megismerhettünk, köztük Ambrus tanár urat is, aki egy nagy vödör barackkal jött órát tartani, ez számomra az emlékezetes ismerkedés. 11 év múlva, mikor egy PhD után, általános iskolában tanítva azon gondolkoztam, hogy mi az és ki az, amit és akitől tanulni szeretnék matematikát, akkor láttam magam előtt a vödör barackot, a tanár úr nevét a jegyzeteimből kellett kikeresnem, és írtam neki. András fogadott, kétszer egymásután kutatói ösztöndíjat pályáztam, és ez alatt sokat tanulhattam tőle. Ott kezdődött, hogy azt mondta, hogy az ELTE-n, aki tanár akar lenni, Pólya György *A gondolkodás iskolája* és Richard R. Skemp *A matematikatanulás pszichológiája* c. könyvét el kell olvasnia. Szakcikkek, interjúk, amit ideadott és ajánlott, elolvastam, órarendet készített, bejárhattam a módszertanosok óra-

ira, de tudta, hogy a gyakorlat még fontosabb nekem, ezért az ELTE Radnóti Miklós Gyakorlóiskolájába járhattam órákra, András erre engedélyt kért. Így kezdődött az én módszertanos hiányaim pótlása, lassan, de biztosan. A napi gyakorlathoz elengedhetetlen szakmai ismereteket sajátíthattam el, valami belső kényszer és kíváncsiság hajtott ezen az úton, és András mindig segített. Ma matematikát és matematikamódszertant is tanítok az óvodai és elemi oktatás pedagógiája szakos hallgatóknak, pedagógiai gyakorlatvezető vagyok. Ha András nem bátorít, nem tanít, nincs mögöttem, akkor talán át sem megyek az egyetemre tanítani. 2009-ben meghívott az első MIDK konferenciára Debrecenbe, és azóta 9-szer találkoztunk, sőt magam is szerveztem egy matematika- informatika didaktikai konferenciát 2013-ban. Amikor közgazdászhallgatóknak írtam jegyzetet, még azt is hajlandó volt átböngészni, véleményezni módszertanilag a kedvemért. A Pólya- interjút, amiből fent idéztem, szintén ő adta a kezembe, és abból kiindulva, én is a tanárt tenném az első helyre. Ambrus András azért jó tanár, mert elsősorban jó ember, nagy a szíve, és az már csak a ráadás, hogy a szaktárgyát igen jól ismeri, hogy szívesen megoszt minden tudást, szeret tanítani, hogy nem magát állítja a tanítási munka középpontjába, hanem önzetlenül segít, kiigazít, tanácsot ad és igazán tud örülni annak, hogy valaki az ő észrevétlen segítségével halad a szakmai pályáján. Évente van egy házi, „Tükör" nevű szakmai konferenciánk az egyetemen, ahol egymásnak bemutatjuk, hogy az elmúlt időszakban mire jutottunk, én mindig büszkén jelentem, hogy nekem mentortanárom Ambrus András, akivel évente 1-2 rendezvényen, konferencián találkozunk, figyelemmel kíséri, amit csinálok, és tőle bármiben szakmai segítséget szoktam kérni és kapni. Kívánom, hogy ez még sokáig így maradjon, egészséget, egy kis munkát és főleg sok unokázást kívánok Neked!

1. Problémamegoldó gondolkodás az elemi matematikatanításban

A problémamegoldó képesség általános fejlesztése fontos célkitűzés a matematikatanításban.

„Problémának nevezzük olyan szituáció, kérdés, feladat (problémahelyzet) felbukkanását, amelyre a választ, a megoldást nem tudjuk azonnal észleléssel, emlékezés, tapasztalás alapján közvetlenül megadni, hanem csak közvetett úton: gondolkodási és logikai műveletvégzésen keresztül." (Tuzson, 2003, 11.)

A problémamegoldás fontos szerepet játszik az alkotó gondolkodás kialakításában. A problémamegoldó gondolkodás a gondolkodási tevékenység azon része, amely a problémák érzékelésén, felfogásán, jellemzésén, megoldásán keresztül egészen annak ellenőrzéséig és a kapott eredmények általánosításáig terjed. (Tuzson, 2003)

A modern képalkotó eljárások segítségével (fMRI) M. O'Boyle, a Texas Tech University munkatársa azt vette észre, hogy problémamegoldás közben a matematikából tehetséges tanuló, a 13 éves S. M. agyterületeinek többszörösét, kb. ötszörösét- hatszorosát használja az átlagos képességű tanulókhoz képest. (Randall, 2012).

Felvetődik több kérdés is, például, hogy lehet-e egyáltalán tanítani a problémamegoldást, illetve ha igen, akkor hogyan lehet hatékonyan tanítani? Pedagógusként természetesen hiszünk abban, hogy képesek vagyunk problémamegoldást tanítani, hogy segíthetünk a különböző adottságú, képességű és életkorú tanítványainknak különböző stratégiákat mutatva, és adott feladattípusból több különböző feladatot is megoldva elmélyíthetjük a problémamegoldó képességüket.

A probléma-megoldási stratégiákat, gondolkodási műveleteket tudatosan kell tanítani a tanórákon. A legtöbb esetben a problémamegoldási folyamat áll a középpontban, nem pedig a kapott eredmény. Ezen folyamat struktúráját többször is hangsúlyoznunk kell a tanulóknak. (Ambrus A., 2002)

Már elemi osztályokban jelentős szerepe van a problémamegoldási stratégiák elsajátításának.

A problémamegoldó képesség hatékony fejlesztéséhez hozzájárul minél több olyan szöveges feladat felvetése, amely ismeretlen a feladatmegoldó számára, és amelyhez neki kell megtalálnia a megoldási lépéseket, az algoritmust.

A szöveges feladatoknak e mellett nyilván a szövegértés fejlesz-

tésében is jelentős szerepük van. „A szövegértés fejlesztése a matematika tanításának is kiemelten fontos célja. Egy feladat megértése nélkül a tudatos megoldásról sem beszélhetünk, vagyis a szövegértés alapvető feltétele a problémamegoldásnak." (Török, 2009, 5.)

A szöveges feladatok tanítása az egyik legnehezebb része a matematika módszertannak .A szöveges feladatok megoldása a tanulóktól olyan önálló szellemi munkát igényel, ami egy 6-10 éves gyermeknek nem természetes tulajdonsága. Ezért a pedagógustól nagy munkát igényel, a következő tulajdonságokat fejlesztenie kell: figyelem, türelem, összpontosítás, lényeg kiemelési készség. A pedagógus egyik fontos célja, hogy ne csak a jó tanulók tudják megoldani a szöveges feladatokat, hanem a gyengébbeket is arra a szintre fejlesszék. (Welchner, 1992)

A pedagógusok jelentős szerepet töltenek be a szöveges feladatok tanításában, mivel elengedhetetlen a megfelelő szakmai felkészültség. A szöveges feladatok kompex problémakörökkel rendelkeznek. (Herendiné, 2013)

A feladatok tanórai feldolgozásának legfontosabb lépései Pólya modellje szerint javasolt, amely a problémafelvető gondolkodást fejleszti és a feladatok megoldásának fázisait négy nagy lépésre bontja. (Pólya, 2000)

I. *Értsd meg a feladatot!*

II. *Keress összefüggést az adatok és az ismeretlen között! Ha nem találsz közvetlen összefüggést, nézz segédfeladatok után! Készítsd el a megoldás tervét!*

III. *Hajtsd végre tervedet!*

IV. *Vizsgáld meg a megoldást!*

A problémamegoldás során többféle módszert használhatunk. Ilyen módszerek az ábrázolás módszere, a hamis feltevés módszere (ilyenek például az ültetéses vagy fejes-lábas feladatok), a hármasszabály, a fordított út módszere, az összehasonlítás módszere, a kiküszöbölés módszere, a behelyettesíts módszere és a mérlegelv módszere. Minél többfajta módszert ismernek a diákok, annál sikeresebben tudják megoldani a feladatokat.

Az ábrázolás módszerének az a lényege, hogy a feladat adatait, ismeretlenjét és az ezek közötti kapcsolatot ábrázoljuk és az ábrát

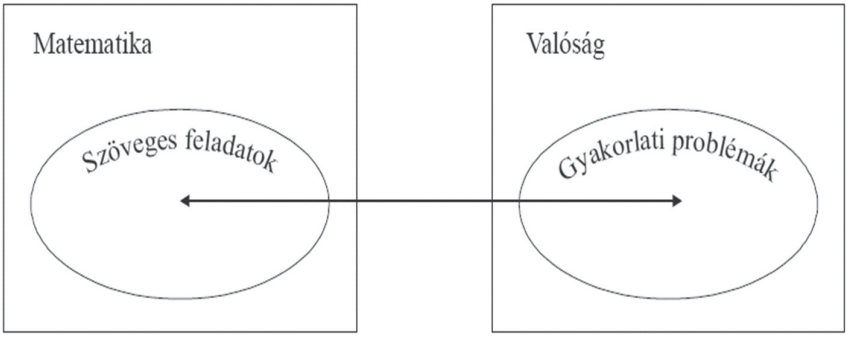
a feladat elemzésénél és megoldásánál felhasználjuk. Az ábrázolás történhet vázlatos rajzzal, síkidomokkal, szakaszokkal, szimbólumokkal, egyezményes jelekkel, betűkkel. Az ábrázolás azért fontos, mert hozzájárul a feladat jobb megértéséhez és memorizálásához is. (Olosz, Olosz, 2000)

A táblázat nagyon jól használható az adatok rendszerezésére, illetve megjeleníthetjük a segítségével az összes lehetőséget kombinatorikai feladatok esetén.

- **Valóságközeli szöveges feladatok**

A matematika szoros kapcsolatban áll a valósággal, így a szöveges feladatok is. „A szöveges feladatok alsó tagozatos feldolgozásával valójában a komolyabb és bonyolultabb gyakorlati problémák matematikai modellezésének képességét alapozzuk meg tanítványainkban." (Török, 2009)

1. ábra: Valóságközeli szöveges feladatok (forrás: Török, 2009)



Pólya (1968) szerint ha a szöveges feladatok valóságközeliek, a tanulók könnyebben értelmezik azokat. A szöveges feladatok lehetőséget nyújtanak a diákok számára, hogy megtapasztalja a matematikai fogalmak és a valós dolgok közötti kapcsolatot.

Fontos, hogy a tanulók összefüggést fedezzenek fel a matematikai és a mindennapos dolgok között. A valósághoz köthető és a gyakorlatban alkalmazható tudást kell nyújtanunk a tanulók számára.

A tanulók nagy részének a matematika tanulása nehéz, unalmas és egyben értelmetlen is. Ez viszont megváltoztatható, ha matematika órán a mindennapi tapasztalataikat alkalmazhatják, valamint ismereteiket összekapcsolhatják és a gyakorlatban is felhasználhatják. Számos iskolai tapasztalat azt bizonyítja, hogy ilyen módon javul a tanulók hozzáállása a matematikához. Ami nemcsak az óra hangulatát befolyásolja, hanem a diákok eredményeit is, valamint felsőbb osztályokban sem zárkóznak, riadnak meg a bonyolultabb feladatoktól és sokkal nyitottabbá válnak a matematika iránt. A matematikatanításban a valósághoz kötés segítségével a tanulók nem riadnak el már a kezdetekkor a matematikától, hanem értelmét látják és ezért sikeresebbek lesznek e tantárgyból. (Ambrus A., 2002)

András (2009) annak a fontosságát hangsúlyozza, hogy a matematikai feladatok minél inkább jelenségorientáltak, problémacentrikusak, az alkalmazott tudást fejlesztőek és valóságközpontúnak kell legyenek. A tevékenységek megszervezésénél a gyerekek ne csak hallják és lássák, hogy mi történik, hanem a tanulók is csinálják és tudják a miértjét.

Annak érdekében, hogy a diákokat rávezessük a jó megoldásra, a feladat szövege minél érthetőbb kell legyen, hisz a megfogalmazás nehézségi szintje befolyásolja a megértést és gátolhatja a helyes megoldás elérését. (Ambrus G., 2007)

2. Problémamegoldás elemi osztályban- egy pedagógiai kísérlet

Két egymásutáni tanév során, 2016-ban és 2017-ben volt egy longitudinális, klasszikus pedagógiai fejlesztési kísérletünk. A kutatási kérdés a következő volt: javul-e a tanulók problémamegoldó képessége, ha az alapvető Pólya-féle feladatmegoldási lépéseket tudatosan hangsúlyozzuk és különböző feladatmegoldási stratégiákkal ismertetjük meg a tanulókat?

Hipotézisünk: A kísérleti csoport eredménye, amely feladatmegoldási és problémamegoldási stratégiákat sajátít el, jobb lesz a kontrollcsoport eredményénél.

A kísérleti csoport tagjai, III. illetve IV. osztályban, öt-öt hét alatt

különböző szövegesfeladat- megoldási stratégiákat, módszereket sajátítottak el, előnyben részesítve a szöveges feladatok helyes értelmezését, megértését, a megoldási lépések betartását, megoldási terv készítését, az esetleges reprezentációt, szemléltetést, az eredménynek a valósággal való egybevetését. (Debrenti, 2016)

A második beavakozáskor a kulcsos problémamegoldási stratégiákat alkalmaztuk. (Herold- Blasius, Jazby, 2016) A tanulók heurisztikus problémamegoldási képességeinek fejlesztésére és több modell együttes alkalmazására egy alternatív lehetőség a nyolckulcsos problémamegoldási modell, amely a tanulót rávezeti úgy a problémamegoldás lépéseire, mint a megoldás során alkalmazható stratégiákra. A tanuló egy nyolc kulcsból álló köteggel rendelkezik a feladatmegoldás során, a kulcsok mindegyikén egy egyszerű utasítás olvasható, ezek közül választhat. A kulcsok javasolják, hogyan kell eljárnia, milyen lehetőségei vannak, hogyan indulhat el, és egyben a Pólya- féle modell lépéseit is tartalmazzák. Nyomon követheti a feladatmegoldás során a használt stratégiákat, ezeknek a neve bevéső dik a többszöri alkalmazás hatására. (Melyik kulcsokat használtuk?) (Debrenti, 2017)

A beavatkozás két lépésben történt: az 1. szakasz 2016. február- márciusban, illetve a 2. szakasz 2017 február- márciusban. Ezt az időszakot a kísérlet szempontjából azért tartottuk alkalmasnak, mert a Kerettanterv szerint mindkét osztályban a tananyaggal a szöveges feladatokig jutottak.

A kontrollcsoport eredményeivel való összehasonlítás során szignifikanciavizsgálatot végeztünk, majd az eredményeket közösen értelmeztük a Partiumi Keresztény Egyetem *Az óvodai és elemi oktatás pedagógiája* szakos hallgatóival a tanév során.

A cél az volt, hogy minden egyes fejlesztési órán változatos, érdekes témájú és különböző típusú szöveges feladatokkal javítsuk a tanulók feladatmegoldási képességeit. A 3. éves tanítóképzős hallgatók tanúi lehettek egy klasszikus fejlesztési kísérletnek, hozzájárulhattak ahhoz, hisz a kísérletben használt szöveges feladatok nagy részét ők alkották meg vagy fogalmazták át.

Összességében eredményesnek bizonyult a kísérlet, a hipotézis beigazolódott, több modell együttes alkalmazására jó lehetőség

lehet a nyolckulcsos problémamegoldási modell, amely a tanulót rávezeti úgy a problémamegoldás lépéseire, mint a megoldás során alkalmazható modellekre, így a komplexebb szöveges feladatok esetén további jó eredményeket érhetnénk el.

3. Problémamegoldás tanítása tanítóképzős hallgatóknak

Az óvodai és az elemi oktatás pedagógiája szakos hallgatóknak a matematika és a matematika tantárgy-pedagógia tantárgyainak oktatása során egyértelműen azt tapasztaltam, hogy a hallgatók matematikai ismeretei, és matematikai gondolkodásának jellemzői széles tartományban helyezkednek el. Jelentős részüknek okoz gondot egy-egy feladat pontos matematikai jelentésének megértése. Azok a hallgatók pedig, akik megértik a feladatot, gyakran használnak a megoldás során olyan betanult sablonokat (képleteket, algoritmusokat), amelyeket pontatlanul ismernek vagy alkalmaznak. Abban az esetben, ha sikeres is a feladatmegoldás valamilyen módon, a nehézséget az okozza, ami leendő munkájuk során a legfontosabb lesz: hogyan lehet az alsó tagozatos tanulók tudásszintjén a megoldás gondolatmenetét elmagyarázni, sőt, inkább a megoldás menetére rávezetni őket.

Egyetemünkön 4 éve indult újra a tanítóképzés, ennyi idő tapasztalata után elmondhatom, hogy a matematika tantárgy tanítása során fejtörést okoz az, hogy mit tanítsak, hogy minél hatékonyabb és hasznosabb legyen a leendő tanító és óvónőknek. A képzés kezdetekor előtesztet, majd a végén zárótesztet írnak a hallgatók, eddig mindig mértem, összehasonlítottam, hogy honnan hova jutottak az ismeretszerzésben.

Az idei tanévben megváltoztattam az addigi tananyagot, és arra gondoltam, hogy nagyobb hangsúlyt fogok fektetni a problémamegoldó képesség fejlesztésére. Ehhez csupa zrinyis feladatokat válogattam, minden tanítási egység alatt ezeket oldottuk, különböző típusú feladatokkal találkoztunk, ezekre megoldási módszereket tanultunk meg. Az ötlet onnan jött, hogy egy 3. osztályban két hó-

napon át matek-kuckóztam a legjobb képességű, matematikából tehetséges tanulókkal, és 16 óra foglalkozás alatt meggyőződhettem arról, hogy a versenyfeladatok megoldása közben a matematika minden területét érintettük, a geometriától a logikai értékig, miközben módszerek sokaságát alkalmazhattuk, az ábrázolástól az adatok táblázatba rendezésén át, a fordított út módszeréig. Nem utolsósorban, a gyerekek nagyon élvezték, mert érdekes, motiváló és játékos feladatok voltak, érdeklődésüknek megfelelőek. Azt is szeretném megjegyezni, amit évek óta tapasztalok pedagógiai gyakorlatvezetőként, hogy sok tanítónő nem készíti, illetve nem készíti fel szívesen a gyerekeket a matematikaversenyekre, mert retteg vagy nem tudja a feladatok megoldását. Arra gondoltam, hogy ha ezekkel foglalkozunk, ezeket megismerjük és megbarátkozunk velük, akkor több módszer birtokában ezeknek a jövendőbeli pedagógusoknak talán más lesz a hozzáállásuk.

A kutatás célja. Résztvevők.

A kutatás célja az erősségek és a gyengeségek feltárása a Partiumi Keresztény Egyetem 1. és 2. évfolyamos tanítóképzős hallgatóinak alapszintű matematikai ismereteivel, gondolkodási módszereivel kapcsolatban a félév elején, illetve a végén, valamint a különbségek elemzése. Összesen N=15+11=26 hallgatót mértem fel.

Vizsgáltam továbbá, hogy a matematikai feladatok megoldása során melyek a *témakörök* (tartalmi területek), és a *kognitív szintek* (ismeret – megértés – alkalmazás) alapján készült besorolás szerint legeredményesebben, ill. kevésbé eredményesen teljesített feladatitemek.

Feltételezéseim: 1. A féléves tantárgy után, mely során főleg problémamegoldást tanítok, a hallgatók teljesítménye javul. 2. A tartalmi területek közül a legjobb teljesítményt a *Számtan-algebra* témakörben nyújtják a hallgatók. 3. A megértés szintű feladatokat eredményesebben oldják meg, mint az *alkalmazás* szintűeket.

Módszer

A mérés során egy-egy szöveges feladatokból álló matematikai tesztet alkalmaztam, amelyek helyes szövegértelmezés és megértés esetén oldhatók meg, így alkalmasak a használható tudás vizsgálatára. Kutatásom arra törekedtem, hogy feltárjam az erősségeket és gyengeségeket hallgatóink alapszintű matematikai ismereteivel, gondolkodási módszereivel kapcsolatban, annak érdekében, hogy a fejlesztési feladatokat és stratégiákat meghatározzuk ezen a területen.

A kutatás résztvevőinek az előtesztben a Zrínyi Ilona matematikaverseny feladatai közül (Megyei forduló 4. osztály 2007, 2008.) válogattam, illetve az utótesztben a Zrínyi Ilona matematikaverseny (Megyei forduló 4. osztály 2015) feladatait kapták.

A hallgatók válaszaiban a megoldási módszereket, azok változatosságát, a pontosságot figyeltem és a leggyakrabban előforduló hibákat elemeztem.

A feladatsor 25 feladatot tartalmazott, a megoldásokat le kellett vezetni. A felhasználható idő 90 perc, a megoldáshoz semmilyen segédeszköz nem volt használható. Maximális elérhető pontszám 100.

Cronbach alfa – a teszt megbízhatósága

Az előtesztem Cronbach- alfájának értéke 0,86, tehát megbízható, utótesztem Cronbach- alfájának értéke 0,78, ami szintén megbízhatónak számít.

A feladatsorok tartalmi dimenzióját az alábbi öt terület adja:

- (H) – a halmazok, logika témakörhöz kapcsolódva: állítások igazságtartalma, állítás tagadása;
- (S) – a számtan, algebra témakörön belül: számfogalom, számszomszédok, kerekítés, műveletek, számolási eljárások, törtrész;
- (G) – a geometria, mérések témakörön belül: mértékegységek használata, átváltása, kerület, terület, testek;
- (R) – a relációk, függvények, sorozatok témakörön belül: nyitott mondatok, egyenes arányosság, sorozatok;
- (K) – a kombinatorika, valószínűség témakörben: permutáció.

A feladatok megoldásához szükséges kognitív szintek a következők:

• (i) – ismeret: annak a képessége, hogy tényeket felidézzünk, vagy azokra emlékezzünk anélkül, hogy feltétlenül értenénk is ezeket;

• (m) – megértés: annak a képessége, hogy a megtanult információt megértsük és értelmezzük;

• (a) – alkalmazás: annak a képessége, hogy a megtanult tudásanyagot új helyzetekben is használni tudjuk (Bloom, 1956).

A tesztben a legnagyobb hangsúllyal a *számtan, algebra* (10) és *a halmazok, logika* (6) témakör szerepel, *geometria, mérések* (4), *a relációk* (3) és a *kombinatorika, valószínűség* (2), a kognitív szintek közül az *alkalmazás* (8), a *megértés* (10) és az *ismeret* (7) közel egyenlő mértékű.

A mérőlap itemeinek 28 %-a az ismeret, 40 %-a a megértés, 32%-a az alkalmazás szintet reprezentálja. Egy-egy feladat többféle kognitív szintet is képviselhet. A besorolást az alapján végeztem, hogy az adott item megoldása a kognitív fejlettség megértés, vagy alkalmazás szintjét igényli-e inkább.

A tartalmi területek és a kognitív szintek arányát az 1. táblázat szemlélteti:

1. táblázat: A tartalmi területek és a kognitív szintek arányai

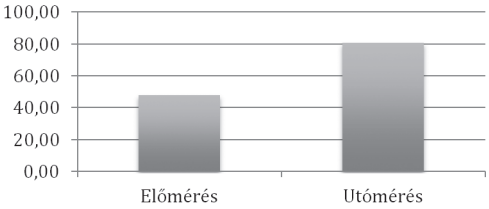
Kognitív szintek / Tartalmi Területek	Ismeret (%)	Megértés (%)	Alkalmazás (%)	A tartalmi terület aránya (%)
Halmazok, logika	4	12	8	24
Számtan, algebra	12	16	12	40
Geometria, mérések	8	4	4	16
Relációk, függvények, sorozatok	4	4	4	12
Kombinatorika, valószínűség	0	4	4	8
A kognitív szint aránya (%)	28	40	32	100

Forrás: Debrenti

- **A kutatás eredményei**

A 2. táblázatban a hallgatók teljesítményét láthatjuk az előteszt és az utóteszt során:

2. táblázat: A hallgatói csoport teljesítménye az előteszt és az utóteszt során



Forrás: Debrenti

A két teszt eredményének összehasonlítása:

3. ábra: t-próba a várható értékek különbözőségére			
	Előmérés	Utómérés	
Létszam	31	26	
Átlag	47,74	80,53	**-32,79**
korrigált szórás	19,94	13,68	
korrigált szórásnégyzet	397,6036	187,1424	16606,668
t próbastatisztika abszolút értéke	**7,095967256**		
szignifikancia szint alfa	0,05		
szabadság fok n+m-2	55		
t táblázatból t(0,05)	**1,697261**		
Eredmény:	**95%-ban szignifikans a kiserleti csoport javulasa**		

Első lépésben a két szórás egyenlőségére vonatkozó hipotézisvizsgálatot (F-próbát) végeztem el, s mivel az eltérésük nem szignifikáns, az F-próba nem mutatott ki szignifikáns különbséget a szórások között, így a t-próba alkalmazásának feltételei adottak voltak.

A két várható érték különbözőségére vonatkozó hipotézisvizsgálat:

A minták egymástól függetlenek és feltételezzük, hogy az eloszlásuk normális, valamint az

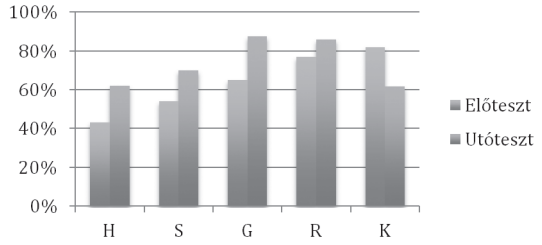
F-próbával végzett vizsgálattal a szórások azonossága fennáll, azaz nincs szignifikáns különbség. A *nullhipotézisünk:* H_0: $\mu_1 = \mu_2$, azaz a várható értékek közelítőleg azonosak.

A statisztikai jellemző *n+m-2=55 szabadsági fokú t-eloszlást* követ (az x szabadságfoka m-1, az y szabadságfoka n-1). A t-próba értéke a *3. ábrából* kiolvasható: t = 7,09 > t kritikus = 1,69, így a H_0 feltevést elvetjük. A két minta nem azonos eloszlásból származik, tehát a mintában az átlagok eltérését nem a véletlen okozza, azaz lényegi. Ez számunkra azt jelenti, hogy a felmérésben szereplő két minta teljesítménye között *szignifikáns különbség mérhető.*

Tartalmi területek szerinti teljesítmény:

Feltételeztük, hogy tartalmi területek közül a legjobb teljesítményt a Számtan-algebra témakörben nyújtják a hallgatók. Ez a témakör az alsó tagozatos matematika-tananyagban az egyik leghangsúlyosabb tartalmi terület. Elvárható lenne, hogy a leendő tanítók lehetőleg hibátlanul oldják meg a témakör feladatait mind a megértés, mind az alkalmazás szintjén. A tartalmi területek szerinti teljesítményét szemlélteti a *4. ábra:*

4.ábra: Tartalmi területek szerinti teljesítmény (%)



Forrás: Debrenti

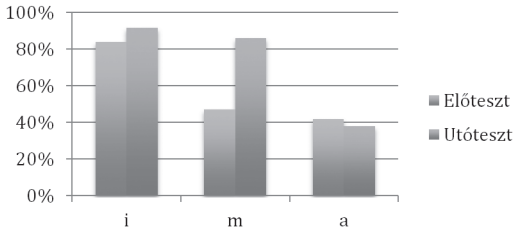
A mérés nem igazolta a tartalmi területek eredményességére vonatkozó feltételezésemet: a *Számtan-algebra* témakörbe tar-

tozó feladatok megoldása során nyújtott teljesítményük (54% az előtesztnél, 70% az utótesztnél) gyengébb a *Geometria-mérések* (65% -illetve 87,5%), a *Relációk-függvények-sorozatok* (77%- 86%) és a *Kombinatorika-valószínűség-statisztika* (82%- 61,5%) témakörök feladatainak megoldása során nyújtott teljesítményüknél is. A Halmazok témakör esetén 43% az előtesztnél, illetve 62 % az utótesztnél a teljesítményük.

Kognitív szintek szerinti teljesítmény:

Feltételeztem, hogy a hallgatók a megértés szintű feladatokat eredményesebben oldják meg, mint az alkalmazás szintűeket. A tartalmi területek szerinti teljesítményt szemlélteti a *5. ábra*:

5. ábra: Kognitív szintek szerinti teljesítmény (%)



Forrás: Debrenti

A kognitív szintekre vonatkozó feltételezésünk igazolódott, azaz hallgatóink legeredményesebbek az ismeret, majd a megértés szintű, legkevésbé az alkalmazás szintű feladatok megoldásában.

Összegzés

A problémamegoldást az összevont tanítóképzős csoportban vizsgálva (mivel a kurzust is összevontan kellett tartanom), a PKE hallgatói az előteszt esetén 47,74%-ban, míg az utótesztnél 80,53%-ban teljesítették a feladatsort. A felmérésben szereplő két teszt eredménye között szignifikáns különbség mérhető. Soha nem mértem még iyen jelentős eltérést. Rendkívül érdekesnek tartom, hogy mennyit fejlődtek, azzal, hogy jobb és érdekesebb, nehezebb felada-

tokat tanulmányoztunk a félév alatt. Feltevődött bennem a kérdés, ennyire fontos az, hogy mit oldunk, a tananyag maga? („What to solve it?") A hallgatók 65%-a alkalmazta az együtt tanult új módszerek közül valamelyiket.

A mérés nem igazolta a tartalmi területek eredményességére vonatkozó feltételezésemet: a hallgatók nem a *Számtan-algebra* témakörben a legeredményesebbek.

A kognitív szintekre vonatkozó feltételezésem igazolódott, azaz a hallgatók eredményesebbek a *megértés* szintű, mint az *alkalmazás szintű* feladatok megoldásában.

A hallgatókat megfelelő feladatmegoldó stratégiákra tanítva, megállapítható, hogy javítható a problémamegoldási képességük.

A matematika és a matematika tantárgy-pedagógia kurzusok keretében további nagy hangsúlyt kell fektetni a szövegértelmezésre és a szemléletes megoldásmódokra (szakaszok, ábrák felhasználása) csakúgy, mint a logikus gondolkodás fejlesztésére.

Felhasznált irodalom

[1] Ambrus A. (2002). A problémamegoldás tanításának elméleti alapjai. Új Pedagógiai Szemle, 2002 október, 157-169.

[2] Ambrus A. (2002). A matematikatanítás módszertanának néhány kérdése. Tankönyvkiadó. Budapest.

[3] Ambrus G. (2007). Hagyományos és problémaorientált feladatok kapcsolatának vizsgálata az iskolai gyakorlatban. A matematika tanítása. Mozaik kiadó.

[4] András Sz. (2009). A matematika tanítása. Státus Kiadó. Csíkszereda.

[5] Bloom, B. S. (1956). Taxonomy of Educational Objectives: Cognitive Domain. New York, McKay.

[6] Debrenti E. (2016). Egy III. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. In Maior, E. Tóth, P.- Varga, A. (Eds.). Empirikus kutatások az oktatásban határon innen és túl - I. KMOK Konferencia Tanulmánykötet (pp. 215-236).

[7] Debrenti E. (2017). Problémamegoldási stratégiák alkalma-

zása a matematikatanításban. In Karlovitz J. T. (Ed.). Válogatott tanulmányok a pedagógiai elmélet és szakmódszertanok köréből (pg. 352-357). Stúrovo, Slovakia: International Research Institute.

[8] Herendiné K. E. (2013). A matematika tanítása az alsó tagozatos. Nemzedékek Tudása Tankönyvkiadó. Budapest.

[9] Herold-Blasius, R., Jazby, D. (2016). Can Strategy Keys Help 3rd and 4th Graders Engage in Mathematical Problem Solving? In Csíkos, C., Rausch, A., Szitányi, J. (Eds.). Proceedings of the 40th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 171). Szeged, Hungary: PME.

[10] Olosz F. , Olosz E. (2000). Matematika és módszertan. Erdélyi Tankönyvtanács.

[11] Pólya Gy. (1968). A problémamegoldás iskolája. Tankönyvkiadó. Budapest.

[12] Pólya Gy. (2000). A gondolkodás iskolája. Akkord.

[13] Randall, T. (Writer, Director, Producer) (2012). Human Brain: How smart can we get? [Documentary] United States: Nova science Now for WGBH Boston. https://www.youtube.com/watch?v=bxbwwEk8A9c [Accessed 09/11/2016]

[14] Török T. (2009). Szöveges feladatok és tanításuk. Nemzeti Tankönyvkiadó Zrt.

[15] Török T. (2013). Szöveges feladatok és tanításuk. In Herendiné K. E. (Ed.). A matematika tanítása az alsó osztályokban (pp. 164-191). Budapest: Nemzedékek Tudása tankönyvkiadó.

[16]Tuzson Z. (2003). Hogyan oldjunk meg aritmetikai feladatokat? Módszertani feladatgyűjtemény, Erdélyi Tankönyvtanács, Kolozsvár.

[17] Wechner A. (1992). Matematika. Segédanyag a szöveges feladatok tanításához. Bács-Kiskun Megyei Önkörmányzat Pedagógiai Intézete

[18] Zrínyi Ilona matematikaverseny feladatsorai (Megyei forduló 4. osztály 2007, 2008, 2015.) MATEGYE alapítvány.

Mi a sorsa egy megtanított ismeretnek?

Kiss Márton és Kónya Eszter
Debreceni Egyetem

Ajánlás

Tanulmányunk tanár (Kónya Eszter) és tanítvány (Kiss Márton) közös munkája, melyet szeretettel ajánlunk Ambrus Andrásnak.

A két szerző közül az egyik, a tanár, Ambrus-tanítványként, Tőle hallott először a kognitív terhelés elméletéről, Ő hívta fel a figyelmét a munkamemória megkerülhetetlen szerepére a megértés és a problémamegoldó gondolkodás elemzésében.

Az évek során folytatott tanulságos szakmai beszélgetések és a számos jó tanács mellett azért is nagy köszönettel tartozik, mert példát mutatott abban, hogyan lehet egyre nagyobb önállóságot biztosítva bevonni a tanítványokat a kutatómunkába.

Bevezetés

Egy matematikai példát valaki vagy meg tud oldani vagy nem. Ha valaki megtanulta a tananyag képleteit, akkor az eredményesek csoportjához tartozik, a többieket pedig a sikertelen kategóriába soroljuk. Ilyen egyszerű az egész, gondolhatnák sokan. Azonban a matematikai problémák sikeres megoldásának feltétele ennél jóval összetettebb és szerteágazóbb. Tanulmányunkban egy konkrét témakörhöz kötődően azt vizsgáljuk, hogy a megtanított és megtanult ismereteket képesek-e néhány hónap elteltével is alkalmazni a tanulók a problémamegoldás során.

Elméleti háttér

Az alkalmazás egyik legfontosabb feltétele nyilvánvalóan a taní-

tott ismeretek megértése, ami igazából nem is egy konkrét feladat megoldásának, hanem az információk összekapcsolásának, majd a megfelelő sémák kialakulásának szempontjából olyan jelentős. Szendrei Julianna így ír a megértés fontosságáról: „A nem megértett dolgokat bizonytalanul hajtjuk végre, és könnyen el is felejtődnek. De legfőképpen: nehezen terjeszthetők ki másra." (Szendrei, 2005, p. 111) A sémák összefüggő ismereteink logikus összekapcsolódásából kialakított olyan szellemi struktúrák, amelyeknek alapvető feladata a tudás megszerzése és a meglévő tudás integrálása, ezáltal annak megőrzése. „Valamit megérteni annyit jelent, mint asszimilálni egy megfelelő szkémába[1]." (Skemp, 2005, p. 63)

A sémákat a hosszútávú memória tárolja és szükség esetén elérhetők a munkamemória számára. A munkamemória feladatkörét Ambrus András így foglalja össze: „Munkamemóriánk terveket készít, transzformációs stratégiákat alkalmaz, az analógiás és metaforikus gondolkodás itt történik, dolgok között kapcsolatokat létesít gondolatban, absztrahál, mentális reprezentációkat alkot." (Ambrus, 2015, p. 65) Ezek a szervezett rendszerek nem csak azért fontosak, mert így lényegesen könnyebben előhívhatók az egyes ismereteink az emlékezetünkből, hanem azért is, mert jelentős mértékben csökkenthetik a kognitív terhelést, vagyis a munkamemória terhelését az információk feldolgozása közben. A munkamemória kapacitása ugyanis korlátozott, ami 7±2 egységnyi információt jelent, de újabb kutatások szerint ez inkább csak 4±1 egységre tehető. Merriënboer és Sweller(2005) is hangsúlyozza, hogy ebből kifolyólag óriási szerepe van a minél összetettebb sémáknak, tudniillik minden séma egyetlen egységnyi helyet vesz igénybe a munkamemóriából. Mindezt átgondolva „megéri" nagy, átfogó sémákat létrehozni, hiszen ugyanakkora kognitív terhelést jelentenek, mint a kisebb szellemi rendszerek, így általuk nagyobb lesz az esélye a sikeres problémamegoldásnak. „… a folyamatnak a hatékonysága attól függ, hogy a feldolgozandó sémák száma hogyan viszonyul a munkamemória meglehetősen kicsi és korlátozott kapacitásához." (Tóth, 2015, p. 11) A kognitív terhelési elmélet központi feltevése tehát az, hogy az emberi agy az információkat sémákba igyekszik ren-

[1] szkéma: a séma szó rokonértelmű megfelelője

dezni, hogy a megszerzett tudás más helyzetekben is alkalmazható legyen (Paas et al., 2003).

A tudás életben tartásához elengedhetetlen a megfelelő szintű ismétlés, ami ennek ellenére nem kapja meg a kellő hangsúlyt az oktatásban. Baddeley (2010a) kiemeli, hogy a fenntartó ismétlésnél lényegesen eredményesebb az elaboratív ismétlés, amely egyben egy mélyebb feldolgozást is jelent, hiszen az új ismereteket a meglévő tudáshoz illeszti. Ez utóbbi folyamat tulajdonképpen megfeleltethető a sémák kiépítésének. Ezenkívül érdekes és megfontolandó a Landauer és Bjork nevéhez fűződő elosztott gyakorlási hatás és a generálási hatás elve (Baddeley, 2010b). Kísérleteik azt mutatják, hogy a gyakoribb, de kevesebb gyakorlás által jobban elsajátíthatók a készségek, mint hosszú, de ritka gyakorlással, illetve az is lényeges, hogy ha valamit saját magunk idézünk fel, arra emlékezünk a legjobban. Ez utóbbit nevezték el a generálási hatás elvének.

Az elosztott gyakorlással vélhetően a funkcionális rögzítettség is kiküszöbölhető. Funkcionális rögzítettségről jelen esetben akkor beszélünk, amikor valaki nem tud egy módszert a korábbiakban alkalmazottól eltérő módon felhasználni, vagy nem jut eszébe más megoldási lehetőség ezen a módszeren kívül. Ez egyben a kreativitás ellentétének is tekinthető. Eysenck (2003) Luchnis és Luchnis kísérletét említi a funkcionális rögzítettség egy esetére, a problémamegoldási beállítódás igazolására. A beállítódási csoport tagjai csak olyan feladatokat kaptak, amelyeket ugyanazzal a módszerrel lehetett megoldani, a kontrollcsoport példái ellenben különböző megoldási módszereket kívántak. „Ezután mindkét csoport kapott egy tesztproblémát, melyet egy nagyon egyszerű módszerrel meg lehetett oldani, de bonyolult módszerrel is, melyet a beállítódási csoport tagjai korábban az összes feladat esetében alkalmaztak. Nem meglepő, hogy a kontrollcsoport rendszerint az egyszerű módszert választotta, míg a beállítódási csoport a bonyolultabb módszert."(Eysenck, 2003, p. 390) A rögzültté váláshoz itt az is hozzájárul, hogy hiába bonyolultabb a másik módszer, a beállítódási csoportnak ismételt élményként az kognitív könnyedséget okoz (Kahneman, 2013).

Összességében tehát, ahhoz, hogy a matematikát összefüggése-

iben lássuk, illetve ismereteinket használhatóan őrizzük az emlékezetünkben, nélkülözhetetlenek a megfelelő és minél kiterjedtebb sémák. Éppen ezért lényeges, hogy az egyes sémák felépítésére és összekapcsolására a tanítás során hangsúlyt helyezzünk.

Kutatási kérdések

Kutatásunk abból a tanítási tapasztalatból indult ki, hogy a középiskolás tanulók gyakran egyáltalán nem emlékeznek olyan, néhány hónappal korábban tanított ismeretre, amely a számonkérés után nem, vagy csak elvétve kerül alkalmazásra. Vizsgálatainkhoz a középiskolai matematika tananyag egy konkrét témakörét, a háromszögek oldalai és szögei közötti trigonometrikus összefüggéseket választottuk. Az alábbi kérdésekre keressük a választ:

1. Milyen sémarendszer alakult ki a szinusz- és koszinusztételre épülő tananyag elsajátítását követően a vizsgált 11. évfolyamos tanulókban?
2. Hogyan oldják meg a háromszögek oldalainak, illetve szögeinek meghatározására irányuló feladatokat ezek a tanulók a témazáró dolgozat megírása után több hónappal?
3. Van-e különbség az első éves matematika szakos egyetemi hallgatókból és 11. évfolyamos tanulókból álló csoportok ugyanezen feladatoknál alkalmazott megoldási módszerei között?

A kutatás körülményei

Tanulmányunkban a témazáró dolgozat vonatkozó feladatait hasonlítjuk össze egy általunk összeállított felmérés feladataival, melyet a témazáró dolgozat után több, mint három hónappal írattunk meg. A vizsgálatban két 11. évfolyamos gimnáziumi csoport, illetve egy első éves matematika szakos hallgatókból álló egyetemi csoport vett részt.

Az 1-es gimnáziumi csoport 12 főből állt, 5 tanórán keresztül fog-

lalkozott a témakörrel 2015 novemberében, a témazáró dolgozatot december elején írták meg. Ebben a félévben matematikaátlaguk 3,5 volt. A 2-es gimnáziumi csoportot 11 tanuló alkotta. 4 tanórát szántak a témakörre 2016 februárjában, ugyanebben a hónapban került sor a témazáró dolgozatra. Félévi matematikaátlaguk 3,3 volt.

Mindkét gimnáziumi csoport 2016 májusának végén írta meg a felmérést, tehát a témakör lezárásától öt illetve három hónap telt el. Az 1-es csoport minden előzetes értesítés és gyakorlás nélkül került megmérettetés alá, a 2-es csoportnak a felmérést megelőző napon egy 45 perces gyakorló órát tartott a szaktanáruk, amin a koszinusztétel alkalmazásával megoldható feladatok szerepeltek.

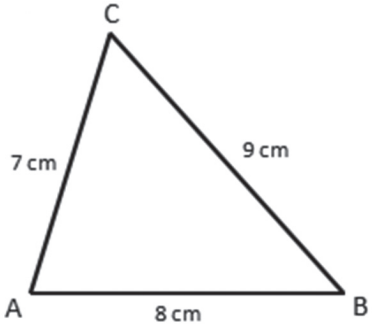
Az egyetemi csoport 12 hallgatóját az első tanév végén, a Geometria 1. kurzus keretében mértük fel. Ők a tanév során célzottan nem foglalkoztak hasonló feladatokkal.

A feladatok bemutatása

A felmérésből két, a témazáró dolgozatból egy feladatot mutatunk be és elemzünk. A felmérés és a témazáró első feladatai egyaránt a koszinusztétel rutinszerű alkalmazására irányulnak, míg a felmérés másik feladata összetettebb. Ezt ugyancsak meg lehet oldani koszinusztétellel, de egyszerűbb és korábban tanult összefüggésekkel is (Pitagorasz-tétel, derékszögű háromszögek hegyesszögeinek szögfüggvényei, a háromszög területképletei). Éppen azért választottuk a matematikának ezt a területét, mert itt jellemzően számos összefüggés felhasználható az egyes feladatok helyes megoldáshoz, nemcsak a legutóbb tanult tételek, hanem olyan régebbi ismeretek, amik egyébként gyakrabban fordulnak elő a tanórákon. A Pitagorasz-tétel 8., a háromszög területképletei 9., a derékszögű háromszögek hegyesszögeinek szögfüggvényei pedig 10. osztályos tananyagok. Optimális esetben mindezeknek az ismereteknek a 11. évfolyam végére egyetlen sémába kellene integrálódniuk, aminek eredményeképpen a tanulók feladatmegoldásuk során képesek a legmegfelelőbb módszert választani.

Felmérés – 1. feladat (F1)

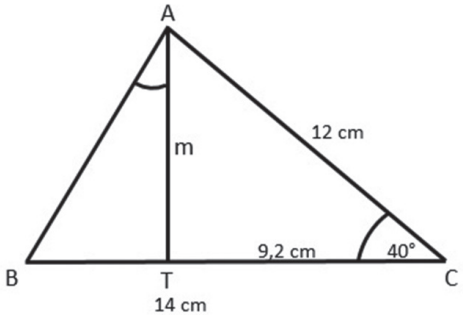
Egy háromszög oldalainak hossza *7 cm*, *8 cm* és *9 cm*. Határozzuk meg (koszinusztétel segítségével)[2] a háromszög leghosszabb oldalával szemközti szöget! *(1. ábra)*



1. ábra

Felmérés – 2. feladat (F2)

Az *ABC* hegyesszögű háromszögben *BC=14 cm*, *AC=12 cm*, *TC=9,2 cm*, a *C* csúcsnál lévő szög *40°*. Számítsuk ki a *BC* oldalhoz tartozó *AT* magasság hosszát! (2. ábra)



2. ábra

Témazáró dolgozat – 1. feladat (T1)

Egy háromszög oldalainak ismeretében meg kellett határozni a szögek nagyságát.

[2] Az 1-es csoport megkapta utasításban azt is, hogy a koszinusztétel segítségével oldják meg a példát, a 2-es csoport feladatlapján ez nem szerepelt.

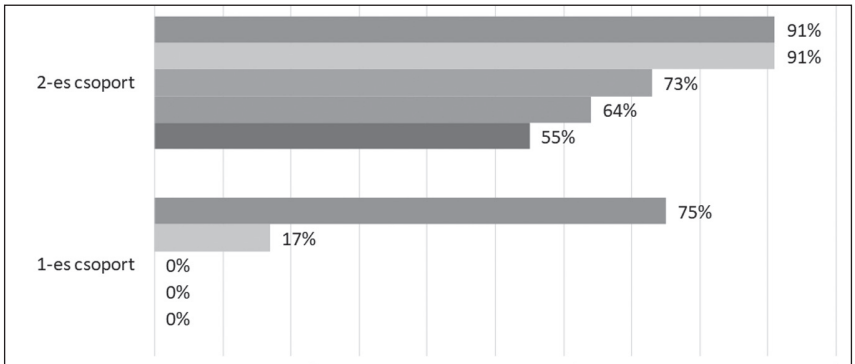
Tapasztalatok

Az eredményeket az egyes csoportokon belül feladatonként, valamint az egyes feladatokon belül csoportonként is összehasonlítjuk. Kitérünk arra is, hogy a témazáró dolgozatban jól teljesítő tanulók milyen eredményt értek el a felmérésben.

A koszinusztétel alkalmazása a témazáró dolgozatban és a felmérésben

Az 1-es és 2-es csoport tanulóinak a T1, F1 és F2 feladatokra adott megoldásait először aszerint hasonlítjuk össze, hogy felhasználták-e a koszinusztételt, és ha igen, akkor azt helyesen tették-e.

T1 és az F1 feladatok megoldását a koszinusztétel rutinszerű, azonos módon történő alkalmazása jelenti, más megoldási módszer nem jöhet szóba. Ahogyan a 3. ábrán látható, mindkét csoport legalább háromnegyede tudta (helyesen) használni a koszinusztételt annak idején a T1 feladatban, míg az általunk íratott felmérésben a gyakorló órát nem tartott 1-es csoportban mindössze a tanulók



	1-es csoport	2-es csoport
T1-ben koszinusztételt használt	75%	91%
F1-ben koszinusztételt használt (volna) ...	17%	91%
... és a képlet felírása után jól helyettesített be	0%	73%
F2-ben koszinusztételt használt (volna) ...	0%	64%
... és a képlet felírása után jól helyettesített be	0%	55%

3. ábra

17%-a próbálkozott ezzel az összefüggéssel, de egyikük sem tudta felírni a helyes képletet. Érdekes az a megfigyelés is, hogy hiába adta meg a feladat szövege számukra a koszinusztétel használatát, a csoport 58%-a a derékszögű háromszög hegyesszögére felírható koszinusz szögfüggvény alkalmazását erőltette, sokan még magasságot is berajzoltak a háromszögben.

Különb volt a helyzet a 2-es csoportnál. Az előző napi gyakorló óra megtette hatását, hiszen a diákok 91%-a használta (volna) a koszinusztételt, és erre a csoport 73%-a helyesen is emlékezett.

Az 1-es csoport F1 feladatnál mutatott kudarca után sejteni lehetett, hogy az F2 feladatban sem fog eszükbe jutni a koszinusztétel, azonban itt már lehetőség volt más összefüggésekkel is számolni. Valóban ez történt, senki sem alkalmazta közülük a koszinusz tételt.

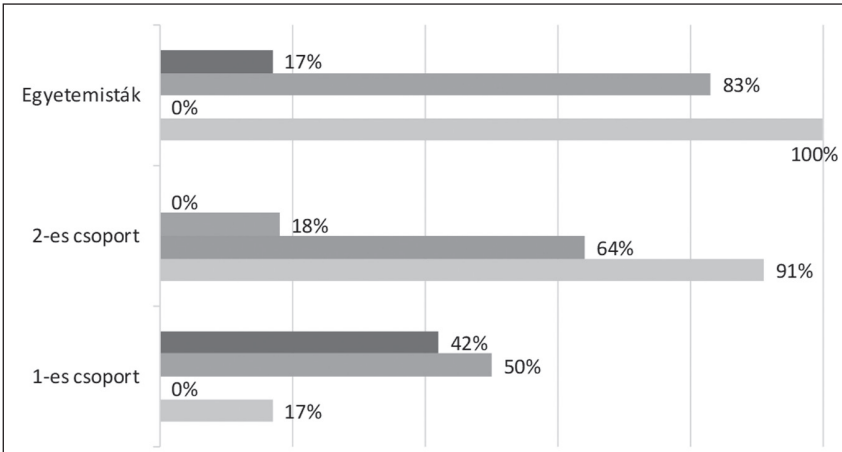
A 2-es csoportnál az előző napi gyakorló óra és az F1 feladat által többé-kevésbé felelevenített koszinusztétel ugyan a hosszabb és körülményesebb utat jelentette a megoldásig, mégis 64%-uk ezt használta, nagyrészt helyesen.

Az F1 feladatban jellemző hiba volt, hogy a diákok nem a leghosszabb oldallal szembeni szögre írták fel a koszinusztételt, hanem automatikusan a *c* oldallal szemközti szögre, ahogyan a képlet általános formuláját ismerték. Az F2 feladatban pedig többen is a keresett magasságot, ami az *ATC* derékszögű háromszögben befogó volt, átfogóként szerepeltették a Pitagorasz-tétel alkalmazásánál. Mindez arra utal, hogy náluk nem történt meg a szimbólumoktól való elvonatkoztatás, csak gépiesen használták a képleteket.

A felmérés 2. feladatának megoldásához használt módszerek

Egy egyszerű rutinfeladat (F1) és egy összetettebb feladat (F2) megoldási módszereit hasonlítjuk össze mindhárom vizsgált csoportban. Ahogyan a 4. ábráról kiderül, az 1-es csoport fele a Pitagorasz-tételt, 42% pedig a derékszögű háromszögek hegyesszögeinek szögfüggvényeit használta (volna), de a csoportnak több mint a fele nem tudta sikeresen alkalmazni az utóbbi összefüggéseket.

Az *ATC* derékszögű háromszög által kínált többféle és kevesebb számolást igénylő lehetőség ellenére a 2-es csoportban a legtöbben,



	1-es csoport	2-es csoport	Egyetemisták
F2-ben szögfüggvényt használt (volna)	42%	0%	17%
F2-ben Pitagorasz-tételt használt (volna)	50%	18%	83%
F2-ben koszinusztételt használt (volna)	0%	64%	0%
F1-ben a koszinusztételt használta (volna)	17%	91%	100%

4. ábra

a tanulók 64%-a, itt is a koszinusztételt akarta alkalmazni, és csak 18% próbálkozott a Pitagorasz-tétellel. A derékszögű háromszög hegyesszögeire vonatkozó összefüggésekre ugyanakkor senki sem gondolt.

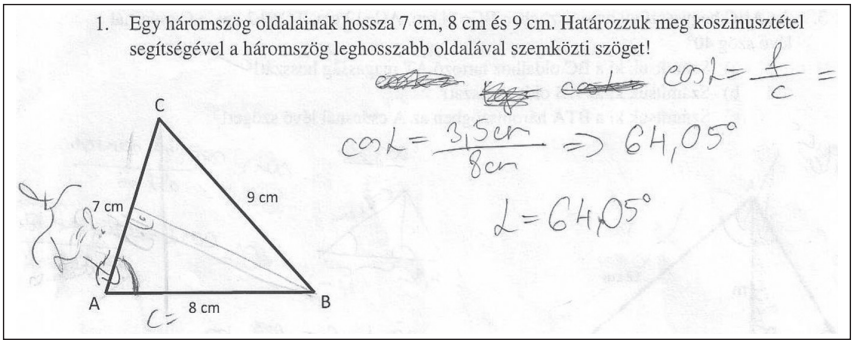
Az egyetemisták közül az F1 feladatban mindenki tudta, hogy a koszinusztételt kell használni, ugyanakkor az F2 feladatban senki sem azt választotta. A csoport több, mint háromnegyede a Pitagorasz-tételt alkalmazta, a többiek pedig a hegyes szögek szögfüggvényeinek valamelyikét. A hallgatók tehát az F2 feladat kontextusához igazodva azt a módszert választották, amelyik a legegyszerűbben vezetett a megoldáshoz.

A gyakorló óra szerepe a koszinusztétel felidézésében

Visszatérve a két középiskolás csoportra, az eddigiekből jól lát-

szik, hogy lényeges különbséget szült a gyakorló óra a koszinusztételre való emlékezés, illetve annak további alkalmazása kapcsán.

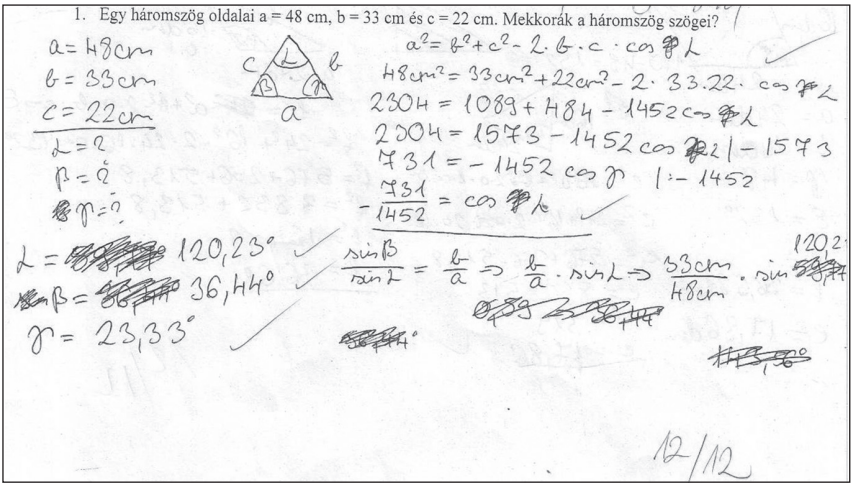
Érdekes az a megfigyelés, hogy a gyakorlást nem tartott 1-es csoport 42%-a annak idején ötös témazáró dolgozatot írt, illetve az ötös dolgozattal bírók 60%-a ötöst szerzett félévkor és a tanév végén is matematikából, de közülük mindössze egyetlen tanuló próbálta használni öt hónappal később az F1 feladatban a koszinusztételt, nem sok sikerrel. Az 5. ábra, amit példaként mutatunk, egy olyan tanuló felméréséből származik, aki egyébként a témából csillagos ötös dolgozatot írt, illetve a félévi és később a tanév végi osztályzata is dicséretes ötös volt. Ennek ellenére az általunk íratott felmérés során nem emlékezett a koszinusztételre, sőt összekeverte azt a derékszögű háromszögek hegyesszögére felírható koszinusz szögfüggvénnyel, helytelenül feltételezve, hogy az *AC* oldalhoz tartozó magasság felezi az oldalt.



5. *ábra*

A 6. ábra ugyanennek a diáknak a témazáró dolgozatából való, a koszinusztétel alkalmazását számon kérő T1 feladat hibátlan megoldását mutatja.

Mindezek jól mutatják, hogy a témakör lezárását követő dolgozat eredménye nem feltétlenül tükrözi az elsajátítás mélységét és a jeles érdemjegy nem mindig jelenti azt, hogy az újonnan megismert tananyag biztosan beépült a tanuló meglévő ismeretei közé.



6. ábra

Összegzés

Tapasztalataink alapján a feltett kutatási kérdésekre a következőképpen válaszolhatunk:

1. A vizsgált két, 11. évfolyamos csoport eredményei azt mutatják, hogy a tanulók valóban nem emlékeznek a hónapokkal korábban tanított ismeretre, hiába írták többen is ötösre a témazáró dolgozatot, illetve szereztek ötöst félévkor és év végén matematikából. Mindez a kutatásba bevont csoportok esetében alátámasztja, hogy az érdemjegyek jórészt csak a pillanatnyi teljesítményt tükrözik, illetve, hogy egy elszigetelten tanult, a későbbiekben nem használt tananyagra milyen nehéz emlékezni. Gyakorló óra nélkül majdnem mindenki összekeverte például a koszinusztételt a koszinusz szögfüggvénnyel, ennek oka valószínűleg az elnevezések hasonlóságában kereshető. A kutatásban részt vevő tanulók közül sokan nincsenek tisztában azzal sem, hogy a különböző összefüggéseket milyen típusú háromszögekben lehet vagy célszerű alkalmazni. Nyilvánvalóan nem látják, hogy a derékszögű háromszögben érvényes Pitagorasz-tétel és a hegyes szögekre felírható koszinusz szögfüggvény

a koszinusztétel speciális esete. Ugyancsak komoly nehézséget okozott mindezek mellett a szimbólumok helyes értelmezése és használata. Sajnos a tanulók többségénél azt tapasztaltuk, hogy a tudáselemek nem alkotnak összefüggő rendszert, így nem áll össze a megfelelő, integrált sémarendszer, amire egyébként lényegesen könnyebb lenne emlékezni is.

2. A felmérésünkből az is kiderült, hogy, amennyiben a témazáró dolgozat után pár hónappal, az újbóli teszt előtt megtörténik az ismeret felidézése, akkor annak meglepő hatása is lehet. A gyakorlásban résztvevő csoport tanulói képesek voltak a koszinusztétel alkalmazására, míg a másik csoport tanulói egyáltalán nem emlékeztek rá. Azonban a friss felidézés réven ez az összefüggés rögzültté válhatott, illetve kognitív könnyedséget okozhatott, hiszen indokolatlan esetben (az F2 feladatnál) is inkább ezt a megoldási módszert használták a tanulók. Érdekes egyébként, hogy a témazáró dolgozatok rendszerint nem mérik, hogy nem használják-e esetenként indokolatlanul a megtanított ismeretet a diákok.
3. Megállapítható ugyanakkor az is, hogy az első évük végén tartó matematika szakos egyetemista hallgatóknál ez a középiskolai témakör már egy stabil, átlátható, komplex sémává alakult, amelyet a feladatmegoldás érdekében adekvát módon képesek kezelni.

Mindebből összességében arra következtethetünk, hogy a választott témakör megtanításával a középiskolás diákoknál csak elszigetelt sémák alakulnak ki, melyek egyrészt nehezen felidézhetők, másrészt nem kapcsolódnak össze más, korábban elsajátított sémákkal és így nem alkotnak egységes, komplex, könnyen előhívható rendszert. Így ennek hiányában nem egy átlátható eszköztárból választanak maguknak módszert a tanulók, hanem az éppen legfrissebb, rögzült ismeret a meghatározó.

Irodalom

Ambrus, A.(2015). A matematika tanulás-tanítás néhány kognitív pszichológiai kérdése. *Gradus2*, 63-73.

Baddeley, A. (2010a). Epizodikus emlékezet: szervezés és emlékezés. In: A. Baddeley, M. W. Eysenck, M. C. Anderson, *Emlékezet*, (pp. 155-182). Budapest: Akadémiai.

Baddeley, A. (2010b). Tanulás. In: A. Baddeley, M. W. Eysenck, M. C. Anderson, *Emlékezet*, (pp. 119-154), Budapest: Akadémiai.

Eysenck, M. W. (2003). *Kognitív pszichológia.* Budapest: Nemzeti Tankönyvkiadó.

Kahneman, D. (2013). *Gyors és lassú gondolkodás.* Budapest: HVG Kiadó.

Kiss, M. (2017). *A megértés és a memória szerepe a problémamegoldás módszerének kiválasztásában.* OTDK-dolgozat, XXXIII. OTDK Konferencia, Győr.

Paas, F. G., Tuovinen, J. E., Tabbers, H., & Van Gerven, P. W. M. (2003). Cognitive Load Measurement as a Means to Advance Cognitive Load Theory. *Educational Psychologist, 38 (1),* 63-71.

Skemp, R. R. (2005). *A matematikatanulás pszichológiája.* Budapest: Edge 2000.

Szendrei, J.(2005). *Gondolod, hogy egyre megy?* Budapest: Typotex Kiadó.

Tóth, Z. (2015). A kémiai fogalmak tanításának lehetőségei és problémái. *A kémiatanítás módszertana,* 8-19. Retrieved from

http://ttomc.elte.hu/sites/default/files/kiadvany/kemiatanitas_modszertana_jegyzet.pdf

Van Merriënboer, J. J. G., Sweller, J. (2005). Cognitive Load Theory and Complex Learning: Recent Developments and Future Directions. *Educational Psychology Review 17,* 147-178.

Váci Mihály:

Eső homokra

Használni akartam - nem tündökölni,
sem esztétikák rangsorát pörölni.
A hallhatatlan szent tülekedésében
lemaradtam - a startnál már lekéstem.
ezért a pályát messze elkerültem,
a robotoló tömegbe merültem,
és dolgoztam hajnaltól éjszakáig,
a gondolat míg csonton átvilágít,
s míg csillagok közt kószált annyi bajnok,
- gürcöltem, mint egy elnyűtt hivatalnok.
Nem restelltem leszállni a keresztről,
ha egy paraszt kérvénnyel keresett föl;
s két megváltó ihlet közti szünetben
értekezleten szóltam - bár ügyetlen.

Nem hittem én az elnyomott zsenikben:
ki tenni akart - az tehetett itten!
Volt mit! Mert volt kereszt is, hogy reája
feszüljön vagy meggörnyedjen alája.
Volt pokol is - megjárni mindazoknak,
kik nemcsak vonakodva tusakodtak,
fennszóval áhítva a pokoljárást,
vigyázva: maguk semmibe ne ártsák.

Volt itt dolog, nagy ügy, kárhozat annyi!
Lett volna - volt! - miért élni, meghalni.
Voltak milliók - elhagyva ügyükben -
kikért élhettünk volna vert hitünkben.
Volt pálya, ügy, elhívó kötelesség,
biztató kor - közülünk várva hősét.
Ez az idő se nyújtott kevesebbet,
csak mi - fiai, voltunk kevesebbek:
bősz nagyravágyók: lesve a csodákat,
nem tettük azt, amiből csoda válhat.

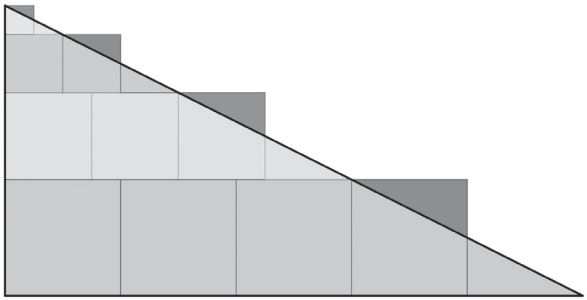
Mert nem hiszem, hogy ne lehetett volna
kitartó, csendes, hű forradalomban
élni:- szeretni, hinni a világot;
tenni valamit, mivel besugárzod;
melegíteni: - telet a gyertya lángja;
szelidíteni: - aszályt a szik virága;
rázni a világot: - szellő az erdőt;
kérlelve bíztatni: - karsztot a felhők;
lázadni: - úgy, hogy magadat naponta
feláldozod, ha mégoly kis dologra;
ellenszegülni: másképp nem? - parányi
toporzékoló ügy nyergébe szállni,
osztani magad:- hogy így sokasodjál;
kicsikhez hajolni:- hogy így magasodjál;
hallgatni őket, hogy tudd a világot;
róluk beszélni, ha szólsz a világhoz.
Széjjel szóródni - eső a homokra -
sivatagnyi reménytelen dologra
s ha nyár se lesz tőled - s a táj se zöldebb:
- kutakká gyűjt a mély:- soká isznak belőled!

Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege

Kézér Ildikó

Egyetemi hallgató koromban ismertem meg Ambrus tanár urat, az Elemi matematika blokk című kurzus óráit látogatva. Az azóta eltelt majdnem másfél évtizedben is bármikor fordulhattam, fordulhatok hozzá most is kérdésekkel, segítségére számítva, jelenleg társ-témavezetőként is segíti doktori tanulmányaimat. Sok mindent kaptam a tanár úrtól útravalóul az egyetemi évek alatt, nemcsak későbbi tanári pályámra vonatkozólag, de emberségből, szeretetből is. Ami a matematikatanítást illeti, az egyik útravaló, amit kaptam – és amit magam is az egyik legfontosabb követendőnek tartok a tanításban –, hogy próbáljunk meg egy adott problémát a lehető legsokoldalúbban megközelíteni; hogy mindig próbáljuk úgy szervezni egy adott probléma feldolgozását, hogy az a különböző matematikai tudásszinttel vagy érdeklődéssel rendelkezők heterogén csoportjának minden tagja számára élményt jelenthessen.

Az egyetemi kurzus egyik óráján a köbszámok összege került szóba, az összegképlet bizonyítása, és máig emlékszem az 1. ábrára, amellyel ezt az órát megelőzőleg még nem találkoztam.



1. ábra

Ezért ennek az esszének a témájaként a köbszámok összegének tanítását választottam. A leírtakat részleteiben sokszor tanítottam már (ugyan nem minden itt leírt részletét), különféle tagozatokon különféleképp, azonos profilú más-más gyerekcsoport esetén is különbözőképp (hisz persze minden gyermekcsoport különböző). Ezt a témát (témakört) nagyon szeretem, azt gondolom, hogy gyermek és tanár számára egyaránt igen hálás fejezete a matematikának. Azt igyekszem most röviden összefoglalni, hogy miért is gondolom mindezt.

Azt hiszem, hogy általánosságban maga a figurális számok témaköre sok-sok ponton előbukkanhat a gyermek tanulmányai során, és tulajdonképpen csak a tanári ízlés kérdése, hogy valójában hányszor is találkozik egy diák a 12 év során e téma szépségeivel. Kisebb korában még esetleg csak játék szintjén, később akár már indoklással. Mint egy nem túl nehéz algebrai azonosság annál érdekesebb alkalmazása, vagy egy lineáris egyenletrendszer megoldása kapcsán, vagy a teljes indukcióról tanulva, vagy ha épp a polinomillesztésről van szó, vagy az integrálszámításról, és még folytathatnám a sort. Többször elő lehet hozni ezt a témát, persze nem öncélúan, mindig adhatunk valami új, más megközelítést. Számtalan lehetőség rejlik benne, a megközelítés módját tekintve is dönthetünk többféleképpen: tekintsük-e ezt egy zárt problémának, azaz tűzzük ki úgy a feladatot, hogy megadjuk, mit is kell bebizonyítani vagy bízzuk a gyerekekre a bizonyítani kívánt képlet megsejtését is? Utóbbi esetben természetesen lehetséges, hogy valamiféle kezdeti segítséget azért adnunk kell, legyen ez a segítség akár vizuális (mint például az 1. ábra vagy akár egy dinamikus ábra segítségül hívása). Ehhez kapcsolódóan persze a feldolgozás módjától is függ a választott segítség formája, attól, hogy a problémát közösen vagy egyéni munka során dolgozzuk fel – utóbbi esetben persze ismét lehet a segítség megválasztásával is differenciálni –, hogy a feldolgozás otthoni vagy órai feladat. És ami mindig szempont: milyen mélységben szeretnénk ismerkedni az összegképlettel. Ezt a döntést nyilván szintén sok minden befolyásolja. De bárhogy is döntünk, és bármilyen mélységben is „játszunk", mindenki számára legyen elérhető közelségben valamilyen élmény. Ami még szintén nagyon fontos, és

ami ismételten indokolja, hogy magam miért kedvelem nagyon ezt a témát: jó néhány matematikatörténeti vonatkozást lehet mesélni, kezdve Püthagorasztól, Fermat és a margó történetén, a Hardy-Ramanujan számok és a taxi meséjén át odáig, hogy egy divatcég miként kérte fel Andrew Wilest modellnek. Ezekkel az apróbb vagy hosszasabb történetekkel végigkövethetjük a matematikatörténet bizonyos fontos állomásait és eseményeit, illetve ha az anekdoták nem is mindegyike a tudományos jelentősége miatt fontos, de bájos és szórakoztató, és a gyerekek számára minden bizonnyal közelebb hozza a matematikát (és a matematikusokat). Ajánlhatunk olvasmányokat, filmeket, amelyek szorosabban vagy lazábban kötődnek a témához.

A cél tehát, hogy az alábbi egyenlőségel kapcsolatos ismereteket, lehetőségeket némileg körbejárjuk:

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Néhány lehetséges feldolgozás

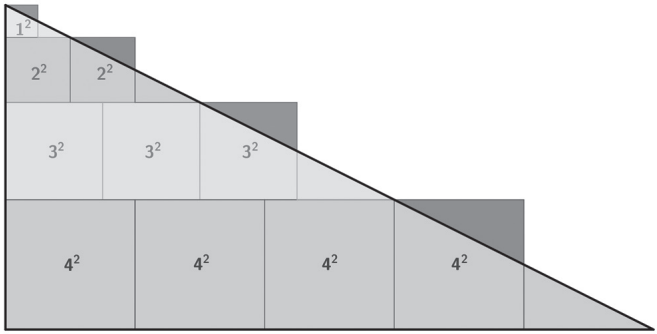
I. „Játszunk átdarabolósat!"

A gyerekekkel az ábrákhoz tartozó átdarabolásokat természetesen akár manuálisan is elvégeztethetjük, de ha erre nincs elég időnk vagy több lehetséges utat is szeretnénk megmutatni, akkor akár készíthetünk egy rövidebb „moziť" is (például a GeoGebra segítségével). Ennek nyilván egyik legnagyobb előnye, hogy az bármikor újra lejátszható, a bizonyítás az ábra segítségével a táblán vagy akár a moziba eleve beépítve is kivitelezhető. Másrészt a gyerekeknek igénye is van az efféle mozi-élményre. Természetesen akár az interneten is fellelhetünk animációkat (nem feltétlenül csak olyanokat, amelyek a GeoGebra segítségével készültek, vagy amelyek végül „elárulják" az összegképletet).

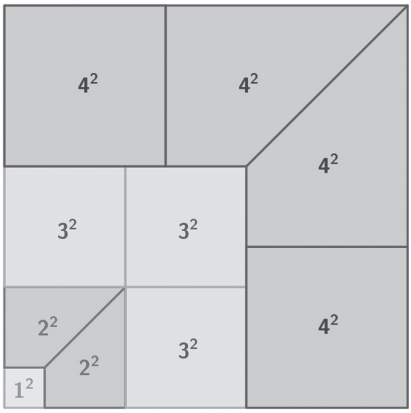
Ezek az ábrák (készített animációk) mind az összegképlet megsejtésének egy-egy lehetőségét kínálják. Hogy a sejtést követi-e a bizonyítás vagy sem, az nyilván az adott szituációban megfonto-

landó kérdés, de az persze bizonyos, hogy ha nem is választjuk azt az utat, hogy a képletet bizonyítsuk, akkor is el kell mondani a gyerekeknek, hogy azért ezzel adósak lennénk. Könnyen lehet, hogy a gyermek számára nem is világos, hogy mi az, amit az adott „átdarabolós játékban" bizonyítani kellene, hiszen megtapasztalta, hogy a dolog működik, „hát látom!" – mondja, és nem érti, miért kellene egyáltalán bármin is tovább elmélkednie.

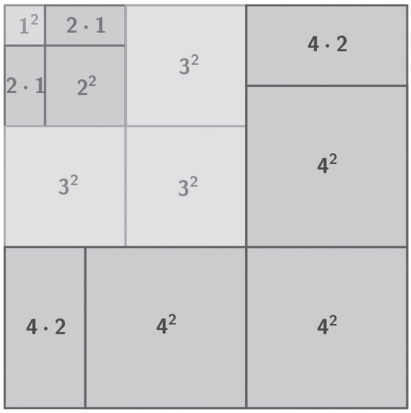
Az 1. ábra kivételével az alábbi ábrák eredeti változatának forrása az internet, illetve a 3. ábra eredetijét Roger B. Nelsen Proof without words – Exercises in visual thinking című könyvében láttam először.



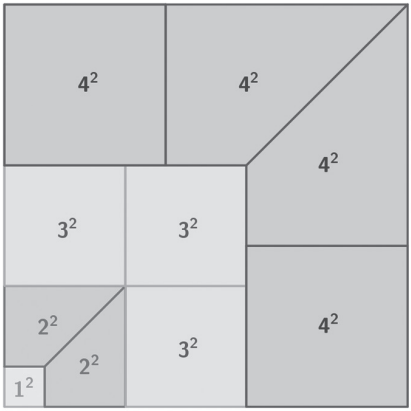
1. ábra



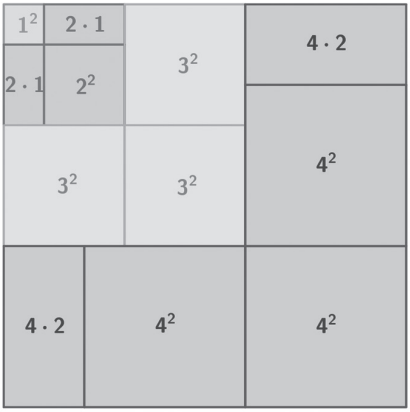
2. ábra



3. ábra



4. ábra



5. ábra

Az interneten például található az 1. ábrához és a 3. ábrához kapcsolódó animáció is: a https://www.geogebra.org/m/bKrv5UfJ és a https://www.geogebra.org/m/qCMTDrmD címen, részben az 5. ábrához kapcsolódóan például a https://www.geogebra.org/m/JHWhdhTr címen.

Bár a bizonyításokhoz nincs szükség igazi „nagyágyúkra", azért ahhoz, hogy megértsük, hogy az átdarabolás-átrendezés valóban működik, szükséges némi számolás. Illetve a megfelelő alakzatok területképletén túlmenően - a 4. ábrához tartozó meggondolást leszámítva - a számtani sorozat első *n* elemének összegére vonatkozó képletet is használni kell valamilyen formában(legyen szó a pozitív egész számok vagy a pozitív páratlan számok számtani sorozatának első *n* elemének összegéről).

Vegyük szemügyre a gondolatindító 1. ábrát. Ennek alapgondolata – amely az utolsó ábrához tartozó bizonyítást leszámítva mindegyik gondolatmenet lényegi ötlete –, hogy egy köbszámra az alap és az alap négyzetének szorzataként tekintünk. Ilyen módon azonnal kapjuk a köbszámok egyik képi reprezentációját: egy köbszám azzal az összterülettel reprezentálható, amit úgy kapunk, hogy a hatványalapnak megfelelő oldalhosszúságú négyzetekből éppen a hatványalapnak megfelelő darabszámot veszünk. Ezeknek a négyzeteknek az ügyes elrendezése vagy átdarabolás utáni ügyes elrendezése adja a bizonyítást az első négy esetben. Az első

esetben tehát az ügyes átdarabolás egy háromszöget eredményez, amelynek területét – felhasználva azt is, hogy az egyik befogó hossza éppen az első n pozitív egész szám összege – kiszámolhatjuk, így megkapjuk a kívánt összefüggést az első n pozitív egész köbeinek összegére. A kulcskérdés – és ami felett a gyerekek esetleg könnyebben átsiklanak – persze az, hogy bizonyítsuk, a megfelelő négyzetek megfelelő csúcsait összekötő szakaszok alkotta törött vonal valóban egy egyenest határoz meg, és így az átdarabolás után valóban nem más a feladat, mint egy háromszög területének kiszámítása. Ezt a bizonyítást persze szintén többféleképpen megalkothatjuk, például hasonló háromszögekkel, vagy akár koordinátageometriai eszközöket használva is. Az átdarabolás adta felfedezés, majd a bizonyítás lépésein történő végighaladás bizonyosan elősegíti, hogy a gyerekek könnyebben magukénak érezzék az összefüggést, miszerint: az első n pozitív köbszám összege egyenlő az alapok összegének négyzetével vagy másképp fogalmazva az első n pozitív köbszám összege épp az n-dik háromszögszám négyzete.

Az 5. ábrához tartozó bizonyítás két csodaszép tételre épül. A „már a régi görögök…” kezdő szavak ismerősen hangozhatnak a matematikában már kicsit jártas gyermekek számára, hisz jó néhány tétel elmesélését, bizonyítását lehet a matematika órán így kezdeni. Tehát már a régi görögök tudták, hogy az első k pozitív páratlan szám összege éppen a k-dik négyzetszámmal egyenlő. Az i.sz. 1. században született – későbbi neopitagoreus – Nikomakhosz másrészt azt állította, hogy bármely köbszámot elő lehet állítani egymást követő páratlan számok összegeként. Mégpedig a következőképpen: az n-dik köbszám éppen n darab egymást követő páratlan számnak az összege, amelyek közül a legnagyobb az $\frac{n(n+1)}{2}$-dik páratlan szám. Mindkét tétel bizonyítása önmagában is páratlanul szép, másrészt együtt alkalmazva elvezetnek az összegképlethez. Ennek végiggondolását, valamint a többi ábra segítségével adható bizonyítások mikéntjét az Olvasóra bízzuk.

II. A teljes indukció

A teljes indukció mint módszer fontos és nélkülözhetetlen része a bizonyítások tanításának. Erről és a köbszámok összegének teljes indukció segítségével történő vizsgálatáról remek gondolatokat olvashatunk Pólya György A gondolkodás iskolája című könyvében.

Természetesen, ha a teljes indukció gyakoroltatása a cél, és szükséges egy *(n+1)*-dik gyakorló feladat, akkor akár abban a direkt formában is ki lehet tűzni ezt a kérdést, hogy bizonyítsuk be az összegképletet! Ha azt szeretnénk, hogy az összegképletet magát is a gyerekek sejtsék meg, megélve a felfedezés örömét, akkor is dönthetünk úgy - ha azt látjuk, hogy egyedül nem boldogulnak a problémával -, hogy adunk valamiféle segítséget az elinduláshoz.

Ennek egyik lehetséges alternatívája például a következő: minden bizonnyal ezen a ponton a gyerekek már ismerik az első és a második hatványok összegére vonatkozó összegképletet, és gyaníthatják (némi rávezetéssel), hogy az első *n* pozitív egész köbének az összegét megadó formula az *n*-nek negyedfokú polinomja lesz. Tehát tulajdonképpen ez első lépésben egy nem túl bonyolult polinomillesztési feladat, azaz egy elsőfokú lineáris egyenletrendszert kell megoldani. Így a szemléletes bizonyítás lehetőségétől ugyan elesünk, de amit nyerünk, és amit az ábrák nem sugallnak: az általánosítás lehetősége. Az egyenletrendszerrel persze szintén sokféleképpen lehet megküzdeni, akár a „hagyományos" helyettesítő vagy egyenlő együtthatók módszerével, akár Gauss-eliminációval vagy Vandermonde-determinánsokkal (utóbbiakkal persze vélhetőleg csak a speciális matematika tagozaton tanuló gyerekek találkoztak). Ha a negyedfokú kifejezés a rendelkezésünkre áll összegalakban, akkor jelen céljaink érdekében célszerű ezt szorzattá alakítani, és ezután kitűzni tehát a teljes indukciós feladatot. Hiszen azt kell bizonyítani, hogy ez a kifejezés nem csak az első egy, kettő… öt köbszám összegét adja helyesen, hanem bármely darabszámra működik.

Hogy még inkább alátámasszuk a teljes indukciós bizonyítás szükségességét, mesélhetünk a gyerekeknek olyan képletekről, amelyek, bár úgy tűnik az „elején", hogy működnek, egyszer csak

kiderül, hogy mégsem. Arról, hogy bizonyítás hiányában bármilyen véges sok pozitív egész *n*-re igaz eset mellett sem tekinthetünk egy állítást minden pozitív egészre igaznak. Például megemlíthetjük Euler nevét és az n^2+n+41 „prímképletet". Az első néhány pozitív egész helyettesítési értékét kiszámolva prímet kapunk, sőt *n=39* helyettesítéséig minden pozitív egész *n*-re a kifejezés prímet ad. Az persze könnyen látható, hogy *n=41*-re ez a kifejezés nem prím, sőt már *n=40*-re is összetett szám az eredmény. De mesélhetünk ennél „elrettentőbb" történeteket is, amelyek esetében akár már eleve az is esélytelen vállalkozásnak bizonyulhat, hogy magunk papír és ceruza segítségével vizsgáljuk a kérdést. Például arra, hogy az $n^{17}+9$ és az $(n+1)^{17}+9$ kifejezések nem minden pozitív egész *n*-re relatív prímek (azaz a két kifejezés legnagyobb közös osztója nem minden pozitív egész *n*-re 1-gyel egyenlő), az első ellenpélda igencsak távolabbi, mint az előbbi esetben az *n* értékére kapott *n=40*. Konkrétan a legkisebb ellenpélda egy 52-jegyű szám, nevezetesen az *n = 8 424 432 925 592 889 329 288 197 322 308 900 672 459 420 460 792 433* (forrás: http://primes.utm.edu/glossary/page.php?sort=LawOfSmall).

III. Az általánosított kérdés és az algoritmizálás

A teljes indukciós bizonyítás fenti változata természetesen sugall egy olyan eljárást, amelynek segítségével a magasabb hatványok összegére vonatkozóan is tudnánk összegképletet adni. De a kitevő növekedésével az egyenletrendszer megoldására szánt idő is kétségtelenül jelentősen megnövekszik (ha a megoldást nem programozzuk). Másrészt egy igen lényegi kérdés miértje nem derült ki a fenti megközelítésből, hiszen azt mi sugalmaztuk, de nem indokoltuk. Azt, hogy a köbszámok összegképlete miért negyedfokú polinomja a változónak. Az első *n* pozitív egész *k*-dik hatványösszegét leíró képlet bármely pozitív egész *k* esetén a változó *(k+1)*-edfokú polinomja lenne? A kérdés megválaszolásában a nevezetes azonosságok sietnek a segítségünkre az általánosítás szép és elegáns útját kínálva (és a hatványösszegeket egy a matematika más terü-

letéről ismert fogalommal, a teleszkopikus összegekkel összekapcsolva). Bár azt sem lehet elhallgatni, hogy fenti erények mellett az algoritmus alkalmazása mindenképpen jelenthet bizonyos nehézséget.

A köbszámok összegképletének bizonyításához tekintsük az alábbi azonosságot:

$$a^4 - (a-1)^4 = 4a^3 - 6a^2 + 4a - 1$$

Ezt az egyenlőséget $a=1$-től $a=n$-ig összegezvea bal oldalon kapott teleszkopikus összeg tulajdonképpen az egytagú összeg: n^4. A jobb oldalon pedig megjelenik a köbszámok összege:

$$n^4 = 4s_{n,3} - 6s_{n,2} + 4s_{n,1} - n,$$

ahol az egyszerűbb kezelhetőség kedvéért az $1^k+2^k+3^k+...+n^k$ összeget $s_{n,k}$ jelöli (természetesen a jobb oldalon szereplő utolsó tagra tekinthetünk úgy, mint a nulladik hatványok összegére: $s_{n,0}=1\cdot n=n$).

Ebből az egyenletből, felhasználva, hogy az $s_{n,2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ valamint az $s_{n,1} = \frac{n(n+1)}{2}$ összegképletet ismerjük, rendezés és a számláló szorzattá alakítása után kapjuk a köbszámokra vonatkozó összegképletet.

Ez tehát kétségtelenül egy nem túl hosszas eljárás és tetszőleges hatványösszegre alkalmazható: ha az első n pozitív egész k-dik hatványösszegét szeretnénk előállítani, akkor először is az $a^{k+1}-(a-1)^{k+1}$ különbséget kell a binomiális tétel szerint kifejteni, majd az egyenlőséget $a=1$-től $a=n$-ig összegezni. Ezen a ponton derül ki a korábban említett nehézség:ahhoz, hogy egy adott hatványösszegre explicit képletet adjunk, ismernünk kell az összes kisebb kitevős hatványösszegre vonatkozó formulát. Ezzel az algoritmussal (azaz tulajdonképpen mindössze a binomiális tétel alkalmazása és egy összegzés után) tehát egy rekurzív összefüggést kapunk a kívánt hatványösszegre, ezt, ha minden építőkockát is merünk,

explicitté alakíthatjuk. Az eljárás bizonyítja azt, amit korábban indoklás nélkül állítottunk: az első *n* pozitív egész *k*-dik hatványösszegét leíró képlet bármely pozitív egész *k* esetén valóban a változó *(k+1)*-ed fokúpolinomja.

Ha ismerjük az első, második, harmadik hatványok összegét leíró explicit képletet, és az iménti algoritmus kapcsán eljutottunk oda, hogy egy rekurzív összefüggésből minden építő elemet ismerve bármilyen kitevő esetén tudunk explicit képletet gyártani, akkor felmerül a kérdés: nem létezik-e eleve explicit képlet? A csodás a történetben (és a matematikában) az, hogy létezik. A képlet Bernoulli-formula (vagy Faulhaber-formula) néven ismert:

$$\sum_{a=1}^{n} a^k = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k+1}{j} B_j \, n^{k+1-j},$$

ahol B_j-k az úgynevezett Bernoulli-számok, amelyeket egy végtelen sor definiál. (A képlet illetve a konstansok névadója: Jakob Bernoulli (1654 - 1705).)

Az első néhány Bernoulli-szám, anélkül, hogy foglalkoznánk azzal, hogy ezek miként adódnak a definícióból:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}.$$

(A páratlan indexű Bernoulli-számok közül csak B_1 az, ami nullától különböző.)

A Bernoulli-képletnek a bizonyítása minden bizonnyal meghaladja a középiskolai matematika kereteit, mindenesetre talán a lezárását adhatja a hatványösszegekkel való foglalkozásnak. Még ha a képlet bizonyítására nem is vállalkozunk, érdemes megnézni, hogy Bernoulli maga miként írt a hatványösszegekről, milyen jelöléseket használt, miképp jelentek meg az eredeti szövegben a később Bernoulli-számoknak nevezett konstansok (illetve a mű eredeti címét is érdemes szemügyre venni, ha az imént a sejtésekről volt szó).

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$\int n = \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n$$
$$\int nn = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n$$
$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}nn$$
$$\int n^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$
$$\int n^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c\cdot c-1\cdot c-2}{2\cdot 3\cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c\cdot c-1\cdot c-2\cdot c-3\cdot c-4\cdot c-5\cdot c-6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}Dn^{c-7}\cdots$$

& ita deinceps, exponentem potestatis ipsius n continué minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Jakob Bernoulli: Summae Potestatum (Ars Conjectandi, 1713)

Csak ezen egy oldal tanulmányozása után nem egy feladatot tűzhetünk ki, vagy adhatjuk ki a gyerekeknek feladatként, hogy ők maguk próbáljanak megfogalmazni sejtéseket, felvetni kérdéseket. Például: a legmagasabb fokú tagot tanulmányozva igen könnyen

összegképlet	*legmagasabb fokú tag*
$1^1 + 2^1 + 3^1 + \ldots + n^1 = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$	$\frac{1}{2}n^2$
$1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$	$\frac{1}{3}n^3$
$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2$	$\frac{1}{4}n^4$

adódik egy sejtés.

A sejtés: a k-dik hatványösszegre adható összegképletben a legmagasabb fokú tag $\frac{1}{k+1} n^{k+1}$. Ezt elemi úton is bizonyíthatjuk, anélkül hogy a Bernoulli-képletet felhasználnánk. A szerző által használt jelölés igencsak megelőlegezi az integrálszámítással vont párhuzamot, amely tulajdonképpen az összegzés kiterjesztése folytonos esetre:

$$\int_0^n x^k \, dx = \frac{1}{k+1} n^{k+1}$$

A téma feldolgozása módot ad arra, hogy a matematika különböző területei között hidakat építsünk, ezáltal megteremtve annak – újabb – lehetőségét, hogy a gyerekek valóban megtapasztalják, hogy a matematika egyes ágai (mint például algebra, geometria, kombinatorika, analízis) nem egymástól különálló és függetlenül létezők, hanem igen szorosan kapcsolódnak egymáshoz. Másrészt a többféle megközelítési lehetőség talán valóban lehetővé teszi azt, hogy minden gyermek megtalálja azt az adott feldolgozásban, ami számára csodássá teheti ezt a témát.

Támogatja-e a felfedezésen alapuló matematikatanulást a dinamikus geometriai környezet?

Kovács Zoltán, Nyíregyházi Egyetem

Ajánlás

Ambrus Andrást kezdő matematikadidaktikusként, a kétezres évek elején ismertem meg. Ekkor 15 év „matematikadidaktika mentes" oktatói-kutatói gyakorlat volt mögöttem, amely a geometria különböző területeinek tanításához, differenciálgeometriai kutatásokhoz kötődött. A matematika tanításának kérdései mindig is vonzottak, s ehhez új impulzust adott a különböző számítógépes alkalmazások egyre növekvő mértékű elterjedése. A Debreceni Egyetem Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola Didaktika (szakmódszertan) alprogramjának megalakulása után rögtön résztvevője lehettem témavezetőként, oktatóként és bírálóként. Így kerültem kapcsolatba Andrással, akinek opponensi véleményeiből, tanítványai PhD dolgozataiból sokat tanultam-okultam, többek között a kognitív terhelés szerepéről, vagy a kidolgozott példák alkalmazásáról a tanulási folyamatban. Példamutató számomra, ahogyan a széleskörű elméleti tudás és a saját gyakorlat, tapasztalat szintézise megvalósul András minden előadásában, munkájában. András cikkei mellett külön kiemelem egyetemi jegyzetét (Ambrus, 1995), amely megjelenése idején hiánypótló munka volt, s ma is a matematikatanár képzés fontos forrásmunkája.

Bevezetés

Ez a tanulmány egy tanárjelölteknek tartott tanóra tapasztalatairól számol be, ahol a felfedezésen alapuló matematikatanulási modellt alkalmaztam egy probléma megoldására, részben dinamikus geometriai környezetben.

A vizsgált matematikai probléma a következő. Ha adott egy parabola a vezéregyenesével és a fókuszával, akkor papírhajtogatással úgy szerkeszthetünk érintőt a parabolához, hogy a vezéregyenes egy pontját ráhajtjuk a fókuszra. A szerkesztés elvégezhető ellipszisre és hiperbolára is, ekkor egy kör és a kör középpontjától különböző pont adott. Ilyenkor a körvonal egy pontját kell ráhajtani a fókuszra (Posamentier & Hauptman, 2006).

Az óra megtervezésének közvetlen előzménye volt egy előadás a CERME 10 kongresszuson (Yan, Mason, & Hanna, 2017), amely egy olyan a kutatásról számolt be, ahol a résztvevő hallgatók az érintő hajtás feladatát ellipszisre végezték el. A szerzők fő kérdése, hogy a matematikai kutatási szituáción alapuló módszer támogatja-e a hallgatók érvelési, bizonyítási készségét, s erre pozitív választ adnak. A cikk tehát a bizonyítási folyamatra fókuszálva vizsgálta a megtartott órát, a megfigyelés módszerével. Sok változtatással, de lényegét tekintve hasonló órát terveztem, így lehetőség adódik a tapasztalatok összehasonlítására is. Az óra tervezésében a leglényegesebb különbség, hogy a dinamikus geometriai környezet nálam sokkal hangsúlyosabb szerepet kapott, bár a papírral végzett tevékenység elsődleges szerepe megmaradt.

Célom annak vizsgálata, hogy hogyan befolyásolja a felfedezésen alapuló matematikatanulás folyamatát a dinamikus geometriai környezet. Akérdést azért tartom fontosnak, mert jogosan felvethető, hogy a dinamikus geometriai alkalmazásokkal túl sok mindent készen kap a tanuló, ami éppen a felfedezési folyamat ellen hat. Valóban, az eszköz nem körültekintő használatának lehet ilyen hatása. A tanulmány címe éppen erre a dilemmára utal. A dilemma feloldása körültekintő elemzést igényel, amely további kutatás tárgya lehet, és végleges válasz nem is adható rá, már csak a szoftverek állandóan változó jellegéből adódóan sem.

Az óra megtervezésében és jelen tanulmány végső formába öntésében segítségemre volt Kónya Eszter kolléganőm a Debreceni Egyetemről, akinek ezúton is köszönetet mondok.

A kutatás irodalomi háttere

A felfedezésen alapuló tanítás pedagógiai elvei régóta ismertek, gyökerei Szókratészhez vezetnek vissza, és olyan szerzőknél, mint Jean-Jacques Rousseau (1712-1778) és Johann Heinrich Pestalozzi (1746-1827) is megjelennek. Modern elméletének egyik kifejtője Jerome S. Bruner, aki szerint a tanuló a felfedezésen alapuló tanulás során kutatóként viselkedik, és a tanulás, problémamegoldás lehetőségek felkutatásán keresztül történik. Bruner az oktatás egyik szerepét a kutató viselkedés szabályozásában látja. Ennek három aspektusát emeli ki, ezek az *aktiválás,* a *fenntartás* és az *irányítás* (Bruner J. S., 1974). Másként fogalmazva, a kutatás, a lehetőségek felderítése megköveteli valaminek az elindítását, valamely folyamatnak fenntartását és a vaktában haladás elkerülését.

Bruner több, tanulócsoportban megvalósuló példát említ munkáiban. Az osztálytermi folyamatok tanulmányozása a felfedezésen alapuló tanulásra irányuló kutatások egyik fontos területe maradt. Ruthven szerint a hagyományos és a felfedezésen alapuló tanulási modell közötti különbséget az osztálytermi folyamatok alapján lehet megkülönböztetni. A hagyományos modellben az új ismeretek forrása a tanári előadás, a felfedezésen alapuló modellben a tanulói kutatás, felfedezés az elsődleges. A *felfedezés fázisában* a tanár stimulálja és támogatja a tanulók munkáját, valamint információt gyűjt a tanulók tevékenységéről, amelyet a következő, *kodifikációs fázisban* felhasznál az új matematikai tananyag véglegesítésében, megfogalmazásában (Ruthven, 1989).

A magyar matematikadidaktikai hagyományok fontos eleme a felfedezésen alapuló tanulás. Elsőként Pólya Györgyöt kell megemlíteni. Nagyon könnyű kapcsolatot találni Bruner konstruktivista elmélete és a Pólya által megfogalmazott tanítási alapelvek, azaz az aktív tanulás, a motiváció és az egymásra épülő fázisok elve

között (Pólya, 1985). Az aktív tanulás elvének lényegét Pólya a következőképpen ragadja meg: „…a tanulás nem lehet passzív vagy pusztán receptív, hanem feltétlenül aktívnak kell lennie. […] Eredményes lesz a tanulás, ha a tanuló maga találja ki az elsajátítandó anyag akkora hányadát, amekkorát az adott körülmények között egyáltalán lehet." Pólya a felfedezésen alapuló tanulás három fázisát különbözteti meg: a *felderítést,* a *formalizálást* és az *asszimilálást.* A felderítés a közvetlen megfigyeléshez kapcsolódó heurisztikus szintet jelenti. A formalizálás fázisában szimbolikus szintre emelkedik a megfigyelés, míg az asszimilálás fázisában a megtanultak beépülnek a gondolkodási rendszerbe, ez nyit utat a további alkalmazások, általánosítások felé.

A felfedezésen alapuló tanulás a közoktatási gyakorlatban markánsan a Varga Tamás nevével fémjelzett komplex matematikatanítási kísérletben (elindulása 1963-ban), majd az 1978-as tantervben jelenik meg egyik alapelvként. Surányi János így foglalja össze a felfedezésen alapuló matematikatanulás szerepét a komplex matematikatanítási kísérletben, szintén az órai folyamatokat kiemelve: „[a matematikai gondolkodásmódra nevelés] azonban az óra képének teljes megváltoztatását kívánja. A tanulók maguk szereznek tapasztalatokat, összefüggéseket keresnek, azokat ellenőrzik, keresik magyarázatukat stb. Általában igyekszünk felfedeztetni velük minél többet a matematikából az egyszerű ismeretközlés és reprodukáltatás helyett. Ki többet, ki kevesebbet tud önállóan felfedezni, de mindenki érdeklődéssel gondolkodva halad így előre." (Surányi, 1971)

Varga Tamás szakmódszertani jegyzetében (Varga, 1973) gyakran állít olyan órarészletet példaként a tanárjelöltek elé, ahol megvalósul a felfedeztetéses tanulás elve. Tanulságos például az *Átmenet a „számtanból" az „algebrába"* fejezetben leírt beszámoló, ahol egy szöveges feladat megoldása kapcsán, hetedik osztályban, osztályteremi környezetben, a munkaformák és módszerek gazdag tárházát bemutatva tárja elénk a felfedezésen alapuló tanulás lényegét. Itt csak azt a momentumot szeretném kiemelni, amely szoros párhuzamban van a választható lehetőségek bruneri megközelítésével és

a tanár kodifikációs szerepével. A leírt példában négy tanulói út közül választ ki egyet a tanár a közös megbeszélésre. Az óra lényegét a következő mondatban foglalja össze, amely Varga Tamás elveinek sűrítménye is lehet: „A tanár azt az elvet követte, hogy nem tálalja készen a módszereket, hanem engedi, hogy a gyerekek önálló utakat keressenek".

Varga Tamás egyik utolsó írásában (Varga, 1987) a szituációk fontosságát emeli ki: „kellenek […] nyitott szituációk is, amelyekben tanulók ismerik fel és fogalmazzák meg a matematikai feladatot, gyakran többfélét. Ez a megszerzett matematikai ismeretek alkalmazását is segíti. Az élet nem tankönyv-nyelven megfogalmazott matematikai feladatok elé állít minket, hanem szituációk elé."

A felfedezésen alapuló matematikatanulás során fontos szerepet kap a felfedezett összefüggések igazolása. A felfedezés induktív szakasza után a matematikában szükség van a deduktív lezárásra, a tanár irányító szerepe is nagyrészt ennek megtalálására irányul. A bizonyítás, bizonyítási készség és a dinamikus geometriai környezet kapcsolata sok problémát felvet. Mindenek előtt, veszélyeztetik-e a bizonyítási készség kialakítását a dinamikus geometriai alkalmazások? A kérdés sokoldalú megközelítését adja az *EducationalStudies in Mathematics* folyóirat e témával foglalkozó különszáma (2000, vol. 44.), ld. még (Laborde, 2000). Mi okozhatja a veszélyt? Pólya szavaival élve, „egy megsejtett állítás egyre hihetőbb, ha újabb és újabb speciális esetekre bizonyosodik be" (Pólya, 1988). A konkrét példákból levont, a sejtést alátámasztó megfigyelések gyakran vezetnek a tanulóban a bizonyosság érzetéhez, ami már a tanuló számára feleslegessé teheti a bizonyítást, azaz az induktív folyamat deduktív lezárást. A dinamikus geometriai környezetben produkált példák ráadásul pontosak, a geometriai alakzatok algebrai leírása a meggyőző erőt csak növeli. Másik veszély paradox módon a motiváció elvesztése lehet. Bruner szerint a kutatói aktivitás legfőbb feltétele a „bizonytalanság valamely optimális szintje", és a dinamikus geometriai rendszerek lehetőségei ezt a szükséges bizonytalanságot csökkenthetik. Paradox a helyzet, mert a dinamikus geometriai környezetet éppen a motiváció egyik eszközének tartjuk.

A megtartott óra körülményei, dokumentálás és módszer

A dolgozatban leírt óra a *Technológia felhasználása az oktatásban* kurzus 2017 április 25-én megtartott foglalkozása. A kurzuson a Nyíregyházi Egyetem 14 harmadéves osztatlan tanárszakos hallgatója vett részt[1], a szemináriumot jelen dolgozat szerzője (a továbbiakban Instruktor) vezette. A kurzus egyik fő célja a GeoGebra dinamikus geometriai szoftver megismerése, amely a kurzus foglalkozásainak nagyobbik részét teszi ki. Az óra megtartásakor a GeoGebra használat alapelemeivel már tisztában voltak a hallgatók, a szoftvert biztosan használták egyénileg. Mivel a tantermi oktatási folyamat a tanár és tanuló társas kapcsolatán keresztül valósul meg, fontos megemlíteni azt a körülményt, hogy a csoport minden tagja együttműködő és jó feladattartású.

Az óra célrendszere összetett volt, azt a TPCK (Tehnological, Pedagogical Content Knowledge) paradigma (Mishra & Koehler, 2006) alapján határoztam meg. Eszerint a technológia matematikatanításba történő integrálásának három fő tudáseleme van: a matematikai elem, a technológiai elem (a szoftver technikai használata) és a pedagógiai elem. Ezen elemek kölcsönös átfedéseiből, egymásra hatásából alakul az a komplex tudás, amellyel felvértezve a tanár megfelelő módon tudja a technológiát alkalmazni a tanulási-tanítási folyamatban. Az óra célrendszere mindhárom komponenst magában foglalta.

Technológiai cél: Új GeoGebra funkciók megismerése: nyomvonal, adott tulajdonságú pontok halmazának keresése. Az eddig tanult funkciók gyakorlása.

Matematikai cél: A hallgató tudja a parabola definícióját megfogalmazni, a tárgyi tevékenység végzése során szerzett tapasztalatot pontos matematikai formában megfogalmazni és a megfogalmazott állítást bizonyítani.

Pedagógiai cél: A hallgató egy olyan órának legyen részese, ahol irányított felfedezéses tanulás zajlik. Tudja összehasonlítani a papírral végzett tárgyi tevékenységeta szoftverrel végzett tevékenységgel.

[1] H1 - H14 a tanszkriptekben.

Kutatásom terepkutatás, módszere a megfigyelés. Természetes környezetben figyeltem meg egy tanóra jelenségeit, mint megfigyelő, aktív résztvevője voltam a megfigyelt folyamatnak.

A megfigyelés célja annak vizsgálata, hogy hogyan befolyásolja a felfedezésen alapuló matematikatanulás folyamatát a dinamikus geometriai környezet.

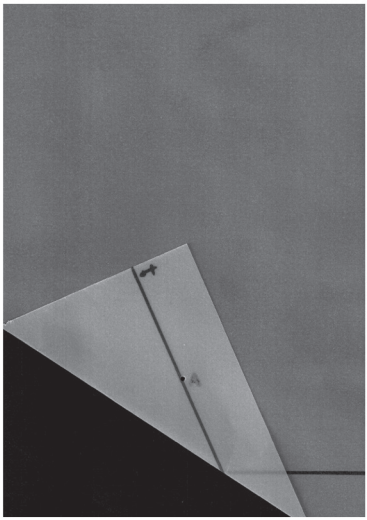
Az óra megtartásához részletes óraterv, majd közvetlenül az óra után írásbeli tanári reflexió készült. (A pedagógiai cél megvalósítása érdekében később ezeket a dokumentumokat a hallgatók rendelkezésére bocsátottam.) Az óra végén a hallgatók névtelenül kimenő kártyát töltöttek ki, amelyen a parabola definíciójára kérdeztem rá, illetve szabadon véleményt nyilváníthattak az óráról. Hangfelvétel is készült, valamint a hallgatói gépek képernyőit folyamatosan fotóztam. Ebben munkában a képernyő fotók alapján készült rekonstrukciók szerepelnek. Az elemzés során felhasználtam az egyik hallgató füzetét is.

A bemutatott tevékenységet 60 percre terveztem, a valóságban 67 percet vett igénybe.

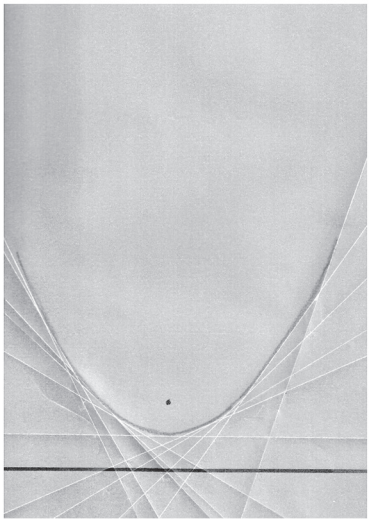
Az órai tevékenységek elemzése

Tapasztalatszerzés, felfedezés, aktiválás a problémamegoldásra

Az egyéni tevékenység során a hallgatók pauszpapírt kaptak, melyen egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont volt megadva. A feladat kijelölésekor semmilyen utalás nem történt parabolára, vezéregyenesre és fókuszpontra (jelölés szintjén sem), az instrukció annyi volt, hogy az egyenest hajtsák rá az adott pontra, és ismételjék meg a hajtást 8-10 különböző módon (*1. ábra*). A tevékenységet, mint geometriai kísérletet fogtam fel, tehát nem egy vezéregyenesen felvett pontot kellett a fókuszra ráhajtani. A hajtogatás elvégzése után azt kértem, hogy színes ceruzával rajzolják rá a papírlapra, hogy mit látnak bele a kialakult ábrába (*2. ábra*).



1. ábra



2. ábra

Instruktor: Írjuk le szavakkal, mit látunk az ábrán!
Többen: Parabolát.
Instruktor: Mit látunk még az ábrán?
H4: Sok egyenest.
H6: Az egyenesek a parabola érintői.
Instruktor: Utánajárunk ennek a megfigyelésnek. Valóban kialakul-e egy parabola az érintőivel?

A tárgyi tevékenység közvetlenül elvezetett a felfedezéshez. Pólya szavait használva, a hajtogatással a hallgatók *ösztönző észrevételekhez* jutottak (Pólya, 1988). Az instruktornak a tevékenység irányításán kívül semmi szerepe nem volt. Megjegyzendő, hogy a tárgyi tevékenység közvetlen módon adott ikonikus reprezentációt[2] a kisimított papíron.

A sejtés bizonyítására a tárgyi tevékenység után közvetlenül is sor kerülhetett volna, de a problémával való ismerkedés fázisát további tevékenységgel szerettem volna megerősíteni, ezért került

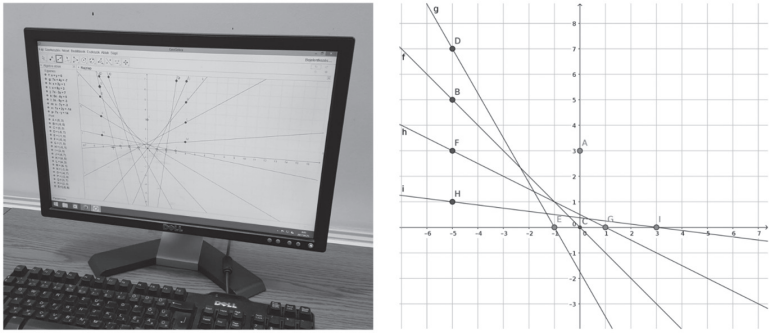
[2] Az elemzés során Bruner jól ismert reprezentációs elméletét használom (Bruner J. , 2004), azaz enaktív, ikonikus és szimbolikus reprezentációról beszélek.

sor a szerkesztés dinamikus geometriai megvalósítására, amelyet az enaktív reprezentációról egy újabb ikonikus reprezentációra való átmenetként értelmezek.

A problémával való ismerkedés, szimuláció: a hajtásvonal megszerkesztése

A következőkben a hajtogatós tevékenységet GeoGebrával hajtottuk végre. A feladat konkrétan az volt, hogy az adott egyenes és pont ismeretében szerkesszenek az ábrán hajtásvonalakat. Önálló, egyéni munkával kezdtük.

Az egyik megfigyelhető tanulói út a papírlap másolása volt a GeoGebra rajzlapjára, azaz a hajtogatás matematikai háttere nélkül, a papírlaphoz hasonlító ábrát próbált a hallgató kreálni. Itt nem a probléma enaktív reprezentációja a kiinduló pont, hanem a papírlap ikonikus reprezentációja. Mintha egy szabadkézi vázlatot készítenénk a szituációról, a geometriai elemek közötti relációk figyelembe vétele nélkül. H2 tevékenysége illusztrálja ezt a stratégiát (*3. ábra*).

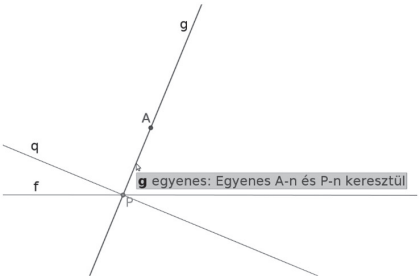


3. ábra

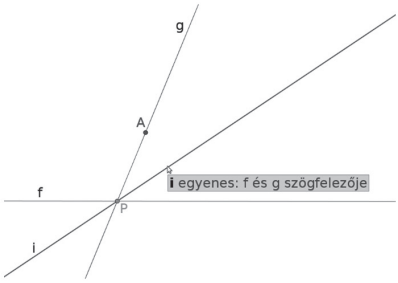
H4 már geometriai relációkkal próbálta rekonstruálni a hajtogatást: a *P* pontot az adott *f* egyenesen vette fel, a hajtásvonal merőleges az *AP* egyenesre, de nem megy át az *AP* szakasz felezőpontján (*4. ábra*).

Matematikailag helyes út egy fordult elő a csoportban. H6 észrevette, hogy az *A* pontra ráhajtott egyenes és *f* szögfelezője a hajtásvonal (*5. ábra*). Az itt közölt rekonstrukciókban csak egy-egy hajtásvonalat közöltem, valójában a hallgatók többet is megszerkesztettek. H6 munkájában pl. 5 különböző hajtásvonal szerepelt a GeoGebra rajzlapon, tehát az ábrát nem dinamikusnak képzelte el: sok hajtás – sok szerkesztés.

Az önálló munka fázisában megfigyeltem a hallgatók munkáját. A kodifikációs szakaszban el kellett döntenem, hogy H6 megoldására támaszkodva folytatom-e az órát, vagy sem. H6 megoldása három problémát vet fel: egyrészt a vezéregyenessel párhuzamos érintő nem kapható meg ilyen módon, másrészt külön diszkussziót igényel a szögfelezőpár problémája: egy kiválasztott *P* ponthoz az *AP* és *f* egyenespár mindkét szögfelezőjére szükség van, amely nem pontosan felel meg a hajtogatásos tevékenységnek. Harmadrészt a házi feladatnak tervezett ellipszis és hiperbola esetét a szögfelezős megoldás nem támogatja. Így másik megoldás mellett döntöttem, amely H4 szerkesztésének javítása. Egy újabb pauszpapíron egyetlen hajtás elvégzésére kértem meg a hallgatókat, majd egy gombostűvel átszúrták a meghajtott, kettős papírt a megadott *A* pontnál. Így az *f* egyenesen nyoma maradt annak pontnak, amit *A*-ra ráhajtottunk, ezt *P*-vel jelöltük.



4. ábra



5. ábra

Instruktor: Milyen geometriai kapcsolat van az átszúrással megjelölt pontok és a hajtásvonal között?
H5: A hajtásvonal az *AP* szakasz felező merőlegese.

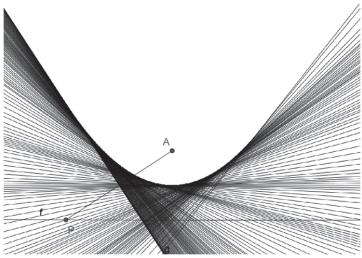
Instruktor: Az észrevétel alapján szerkesszenek meg egyetlen hajtásvonalat!

H5 megállapításának indoklására nem volt szükség, a papírral végzett tevékenységnek pontos megfelelője a mondat. Ezek után az önálló szerkesztés nem okozott gondot. A következőkben a szerkesztés dinamikus jellegére mutattam rá: nem szükséges több hajtásvonalat megszerkeszteni, a *P* pont mozgatásával újabb és újabb hajtásvonalat kaphatunk. Saját maguk fogalmazták meg az igényt arra, hogy jó lenne, ha a hajtásvonalak megmaradnának a GeoGebra rajzlapon, ekkor mutattam meg a nyomvonal funkciót (*6. ábra*). A hangfelvételen jól dokumentáltak a spontán érzelmi reakciók. (Húúú. Ez nagyon szép! Az igen! Nevetés.)

A GeoGebra szerkesztés, ismét Pólya szavaival élve, *alátámasztó észrevételekhez* vezetett. Szerepe azonban ettől több volt. A szerkesztés eredménye egy (dinamikus) ikonikus reprezentáció. Az átmenet az enaktív reprezentáció és az ikonikus reprezentáció között nem direkt volt, a szimbolikus reprezentációra volt szükség, a hajtásvonalat, mint szakaszfelező merőlegest kellett azonosítani. A GeoGebra tevékenység elvégzése azt követelte meg, hogy a hajtogatást szimbolikusan, matematikai fogalmakkal és relációkkal fogalmazzuk meg, azaz matematikai ismereteket mozgósított. A dinamikus geometriai környezet a reprezentáció váltást segítette.

A problémával való ismerkedés, szimuláció: a parabola pont megszerkesztése

A következőkben egy hajtásvonalon a parabola pont megkeresésére került sor. Itt került először elő az órán a parabola fogalma, amelyet a csoport meglepően nehezen, csak tanári segítséggel tudott aktiválni. Ezen a ponton az órán kiaknázatlanul maradt az a lehetőség, hogy a GeoGebrával megrajzoljuk az *A* fókuszpontú, *f* vezéregyenesű parabolát, további alátámasztását adva a sejtésnek. Ez a művelet azonban a motiváció fenntartásához a szükséges „optimális" bizonytalanságot csökkentette volna, így annak elhagyása mellett döntöttem a tervezés során.



6. ábra

Instruktor: [A füzetben és táblán elkészített ábrán dolgozunk.] A szakaszfelező merőlegesen, vagyis a hajtásvonalon hogyan lehetne találni olyan pontot, mely egyenlő távolságra van az adott ponttól és egyenestől?
H8: Merőlegest állítunk az *f* egyenesre, ami az *A* ponton átmegy. Ennek a felezőpontja.
Instruktor: Ez a pont az *f* egyenestől, és az *A* ponttól valóban egyenlő távolságra van, de nem ez volt a kérdés. Egy adott hajtásvonalon keressük a pontot.
H4: Az *AP* szakasz és a szakaszfelező merőleges metszéspontja. (7. ábra, ugyanez H13 füzetében: 8. ábra).
H9: Ez nem lesz jó.
Instruktor: H4 indokolja meg, hogy miért nem lesz jó a javasolt megoldás.
H4: [Miközben a táblához megy, már mondja, hogy „megvan".] $AF = FP > FD$, mert az *FDP* derékszögű háromszögben *FP* befogó, *FD* pedig átfogó.
H6: H4 megoldását módosítsuk, *P*-ben állítsunk merőlegeset *f*-re! $PC = CA$, mert *g* szakaszfelező merőleges (*7. ábra*).

A tanulói utak ismertetésekor egy klasszikus Lakatos-féle párbeszéd (Lakatos, 1981) alakult ki: sejtés (H8) – cáfolat (Instruktor) – új sejtés (H4) – cáfolat (H9, H4) – új sejtés (H6) – bizonyítás (H6). Lényeges kiemelni, hogy a H4 által először megfogalmazott hibás megoldás alapja maradt a helyes bizonyításnak, és az utolsó fázisban (ld. a következő, „Bizonyítás" szakaszt) is szerepet kapott.

Ezt követően a GeoGebra rajzlapon is megszerkesztettük a parabola pontot. Mind „nyomvonal" funkcióval, mind „mértani hely"

funkcióval kirajzoltuk magát a parabolát. A tapasztalatok összegzését a hallgatók adták meg.

Instruktor: Milyen tulajdonsága van a *C* pontnak?

H13: Minden *C* egyenlő távolságra van *P*-től és *A*-tól.

Instruktor: *P*-től és az *A*-tól is, de nekünk most nem a *P* a lényeges …

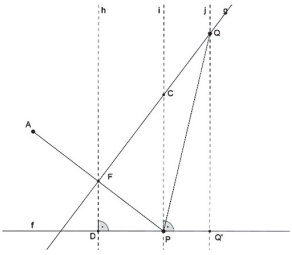
H13: [az Instruktorszavába vágva] hanem az *f* egyenes.

H6: *C* rajta van a parabolán.

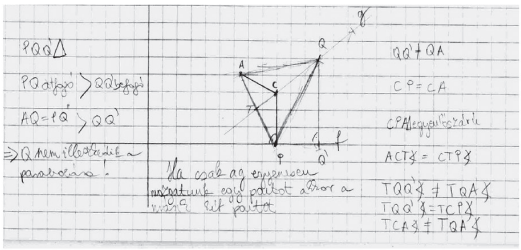
Insruktor: Minden *C* rajta van az *A* fókuszú, *f* vezéregyenesű parabolán.

Ezután rövid utalás történt arra, hogy a szerkesztésből adódóan így a parabola minden pontját megkapjuk.

Ebben a fázisban nagyrészt papír-ceruza tevékenységet végeztünk, a záró GeoGebra szerkesztéssel teljessé vált az ikonikus reprezentáció, a pauszpapíron szabad kézzel behúzott görbét (*2. ábra*) rajzoltuk meg a GeoGebrával, a görbe pontos matematikai hátterét feltérképezve, és bebizonyítva azt, hogy minden hajtásvonal tartalmazza a szóban forgó parabola egy pontját.



7. ábra



8. ábra

Bizonyítás: a hajtásvonal a parabola pontban érinti a parabolát

Ebben a fázisban csak papír-ceruza tevékenységre került sor. Először közös megbeszélésen átfogalmaztuk az „érintés” szót, azaz a hallgatók megfogalmazták, hogy azt kell bizonyítani, hogy a hajtásvonalon nincs más olyan pont, amely rajta van a parabolán. Majd „Think-Pair-Share” (gondolkozz-beszéld meg párban- oszd meg az osztállyal) kooperatív technikát alkalmazva bizonyították

az állítást. A bizonyítási fázis teljes siker volt, bár az egyéni munka szakaszában nem láttam helyes érvelést a füzetekben, a pármegbeszélés során valamennyi pár sikerrel járt (ld. *8. ábra*), s a kiválasztott hallgató a táblánál szabatosan elmondta a bizonyítást.

A hajtogatás és a GeoGebra tevékenység összehasonlítása

A pedagógiai célnak megfelelően, az óra végén csoportmegbeszélés módszerével hasonlítottuk össze a papírral végzett és a GeoGebrával végzett tevékenységet. A hallgatók ellentétpárokban mondták el a véleményüket (1. táblázat).

Hajtogatás	**GeoGebra**
néhány hajtást végeztünk, mindegyiket külön-külön	sok hajtást végeztünk, de csak egyszer szerkesztettünk
próbálgattuk a hajtást, kísérleteztünk	tudatos euklideszi szerkesztést végeztünk
rögtön, direkt módon kijött a hajtásvonal	a hajtásvonal közvetve, több lépésben jött ki, *amin gondolkodni kellett*
a parabolát körülbelül rajzoltuk be	a GeoGebrával pontosan megkaptuk a parabolát, de a „mértani hely" funkció „fekete doboz" volt

1. táblázat

A hallgatók által megfogalmazott összehasonlítás is alátámasztja azt a tényt, hogy a dinamikus geometriai környezet a probléma más analíziséhez vezetett, mint az enaktív tevékenység, amely megállapítás összhangban van az irodalommal (Laborde, 2000). A hallgatók a GeoGebra tevékenység tudatosságát is megemlítették (ld. a kiemelést az 1. táblázatban), ugyanakkor jól azonosították azt a lépést (ld. a táblázatban az utalást a fekete dobozra), amikor a GeoGebra általuk nem pontosan kontrollált módon működött: míg a megszerkesztett egyetlen érintési pont a nyomvonal funkcióval általuk jól átláthatóan adta meg a parabola pontokat, addig a „mértani hely" funkciót fekete doboznak minősítették.

A házi feladatok elemzése

A kurzus felépítésének egyik alapelve, hogy minden órai tevékenységet egy heti feladat követ, amelyet a hallgatók a Moodle rendszerben kapnak meg, és ugyanide kell a megoldást határidőre feltölteniük. Az órához kapcsolódó heti feladat a hajtogatás és a GeoGebra szerkesztés elvégzése, a sejtés megfogalmazása és bizonyítása volt az ellipszis és a hiperbola esetére.

A házi feladat az óra eredeti célrendszerének megvalósítását zárja le a gyakorlási szakasz beiktatásával. Másrészt visszajelzést ad számomra az asszimiláció megvalósulásáról. Ugyanakkor a feladat új szituációt jelent, hiszen az órai problémában a parabola meghatározó adatai (fókusz, vezéregyenes) direkt módon adva voltak, és azokat használni is kellett a hajtogatás során, míg ellipszis és hiperbola esetén az adott kör középpontja, amely az egyik fókusz lesz, a hajtogatásnál nem kap szerepet.

A feladat nem zárthelyi volta miatt értelem szerűen helyet kap a társakkal, esetleg „szakértőkkel" történő együttműködés és az internet használata, ami természetesen megengedett. Ennél a feladatnál az internet használatára utaló jelet nem találtam. Két hallgató esetében a beadott munka alapján egyértelműen megállapítható a teljesen önálló munka, a többieknél megfigyelhető volt a csoportos együttműködés, különböző hallgatói csoportokban. Az egyik hallgató tőlem kért segítséget. („Mi lesz a másik fókusz? Elakadtam a bizonyításban.") A kapott segítséget aztán megosztotta egyik társával is.

Egy hallgató refexiójából[3] idézek, amely jól jellemzi a csoport tevékenységét a házi feladat elkészítésekor:

> **H7:** *Szenvedtem vele, míg végre a nyomvonal azt rajzolta ki, amit én látni akartam,* […] de végül mégiscsak rájöttem, hogy mely pontok/alakzatok szükségesek a megoldáshoz. Nagyon érdekes feladat volt számomra. [Kiemelés tőlem.]

[3] Ez a reflexió a kurzus zárásakor készült, ahol egy szabadon választott heti feladatot kellet értékelni, és nem azonos a heti feladathoz kapcsolódó írásbeli munkával.

A házi feladatok teljesítésénél az előbbi reflexió abból a szempontból jellemző, hogy egyértelmű volt a GeoGebra tevékenység túlsúlya a bizonyítási folyamattal szemben. A hallgatók a papíron kialakult ábra minél pontosabb rekonstrukciójára törekedtek, s ha ezzel készen voltak, lényegében megoldottnak tekintették a házi feladatot, többségében a sejtés megfogalmazása után indoklásként legfeljebb a GeoGebra szerkesztés leírását adták meg. Ez nem azt jelenti, hogy matematikai gondolkodási műveleteket nem végeztek, hiszen az ábrák megszerkesztéséhez is szükséges bizonyos absztrakció, szimbolikus reprezentáció, mint azt korábban kifejtettem. Megjegyzem, hogy geometria tanítási tapasztalatom szerint ez nem csak a GeoGebra szerkesztéseknél, hanem a papír-ceruza szerkesztési feladatoknál is jellemző: a szerkesztés leírása a tanuló számára gyakran pótolja a szerkesztés helyességének indoklását. A hajtásvonalak szerkesztésével egy kivétellel mindenki boldogult, egy hallgató ugyan matematikai relációk segítségével készített ábrát, de az nem felelt meg a hajtogatásnak, mint tevékenységnek. Ezen a hallgatón kívül hárman csak a hajtásvonalak szerkesztéséig jutottak el, az érintési pontot, vagy a kúpszeletet már nem rajzolták meg. Bár a többiek helyesen megtalálták az érintési pontot, erről írásban sokan semmit nem közöltek. Négy hallgató próbálkozott érdemben a bizonyítással, ketten teljes értékű bizonyítást adtak be. Ezért a bizonyításra a következő órán visszatértünk, a sikeres hallgatók ismertették a bizonyítást.

A következőkben három írásos munkából emelek ki egy-egy részletet. Az első arra világít rá, hogy az alátámasztó észrevételeket a hallgató új, az órán nem tárgyalt módon gyűjtötte:

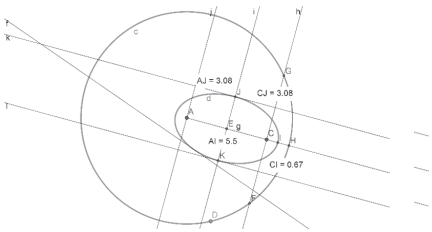
H3: … eszembe jutott, hogy jó lenne kicsit játszani, kísérletezni a házi feladattal. A GeoGebrával való ellipszis készítésénél kijelöltem több belső pontot is. Volt, ami közel volt a körvonalon lévő ponthoz, volt, ami a kör közepén volt, és olyan esetet is megnéztem, amikor a körvonalon lévő ponttól a legtávolabb helyeztem el a belső pontot. A tapasztalatom az volt, hogy minden esetben egyértelmű ellipszis alakzat rajzolódott ki. A sejtésem az, hogy a kör belsejében bármely pontot kijelölhetem, ha összekötöm egy körvonalon lévő ponttal és meghúzom a felező merőlegest, annak nyomvonala minden esetben ellipszist fog kirajzolni.

A második részlet arra utal, hogy a hajtogatás a hallgató számára nehéz volt, az eredmény pontatlan, míg a GeoGebrá-val sikerrel járt:

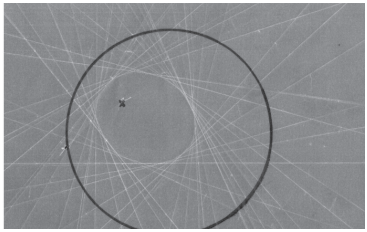
H10: A papírlapon sajnos nem egyértelmen kivehető az alakzat. A GeoGebra segítségével szépen kirajzolódik a hiperbola.

H6 az írásbeli munkájában az ellipszis esetével foglalkozott. Beszámol arról, hogy a GeoGebrával megrajzolta a vélt ellipszis tengelyeit (9. ábra), illetve a tengelyek végpontjaiban az érintőket. A tengelyek végpontjaira mérést alkalmazott: „Használtam a távolság funkciót a GeoGebrában, hogy megnézzem az *AJ, CJ, AI,CI* távolságot, majd ezeknek az összegéből *kiderül, hogy tényleg egy ellipszisen vannak.*" [Kiemelés tőlem.]

A felfedezésen alapuló tanulás szempontjából H6 munkája kettős üzenettel bír. Egyrészt újabb, a probléma szempontjából releváns felfedezést tett: meghatározta az ellipszis egyik tengelyét. Ebben a dinamikus geometriai környezet egyértelműen segítette, a pauszpapírján nem szerepelnek a tengelyek (10. ábra), a GeoGebra ábrán már igen. Ugyanakkor a tapasztalat méréssel történő ellenőrzését bizonyításnak fogadta el (ld. a kiemelést az idézetben), ami már a dinamikus geometria negatív hatása.



9. ábra



10. ábra

Összehasonlítás Yan-Mason-Hanna kutatásával

Az óra megtervezését és a jelen munkát is jelentős mértékben inspirálta a (Yan, Mason, & Hanna, 2017) dolgozat, mely a felfedezésen alapuló matematikatanítás és a bizonyítás tanulásának ösz-

szefüggéseit vizsgálja. A hivatkozott dolgozatban bemutatott tárgyi tevékenység szintén a kúpszeletekhez kapcsolódott, az ellipszissel kapcsolatos papírhajtogatás is szerepelt. Kiemelik, hogy az órán kevés értelmezés és magyarázat volt a tanár részről, a sejtéseket a hallgatók fogalmazták meg, a kérdéseket a hallgatók tették fel, ezért motiváltak voltak a bizonyításban, bár a leírtak szerint magával a bizonyítással nehézségeik adódtak.

A jelen dolgozatban tárgyalt elrendezés egy lényeges tekintetben különbözött a (Yan, Mason, & Hanna, 2017) dolgozatban leírtaktól, nevezetesen a dinamikus geometriai környezetet már a tevékenység korai szakaszában használtuk, míg a hivatkozott dolgozatban csak a végén szerepelt egy Geometer's Sketchpad demonstráció.

A felfedezésen alapuló tanulási folyamat osztálytermi implementációja, a tanári magatartás mindkét esetben hasonló volt. Tanári értelmezés alig, vagy egyáltalán nem volt, a hallgatók maguk fogalmazták meg a felfedezéseket, a bizonyítási folyamatban is aktívan részt vettek. (Yan, Mason, & Hanna, 2017) szerint a hallgatók azért is voltak motiváltak a bizonyításban, mert az állításokat saját maguk fogalmazták meg. Az általam leírt esetben ebben egyáltalán nem vagyok biztos, amint az a tantermi munka és a házi feladat összehasonlításából kiderült. A tantermi bizonyítás esetén véleményem szerint megkérdőjelezhetetlen szerepe van a tanárnak, s bár az állítást a hallgató feltehetően magáénak érzi, ha maga fogalmazta meg, nem zárható ki, hogy a bizonyításban azért érdekelt, mert a tanár ebbe az irányba vezette az órát. Ebben a folyamatban szerepet játszik a csoport feladattartása és együttműködési készsége a tanárral.

A (Yan, Mason, & Hanna, 2017) dolgozat beszámol arról, hogy a hallgatók a reflexióikban a papírhajtogatást bonyolult tevékenységnek írták le. A saját csoportomban a hajtogatás semmiféle nehézséget nem okozott, a kimeneti kártyákon a hallgatók kifejezték, hogy tetszett a tevékenység nekik. Ennek oka feltehetően a hallgatói csoportokban rejlő különbség lehetett, tanárszakos hallgatóktól nem állnak távol a hajtogatáshoz hasonló elemi tárgyi tevékenységek. Emellett átlátszó pauszpapírral dolgoztunk. A hivatkozott dolgozat beszámol arról, hogy a nem átlátszó papír jelentős mértékben akadályozta a munkát.

Összegzés

A dolgozat bevezetésben föltett kérdéshez, ti. „hogyan befolyásolja a felfedezésen alapuló matematikatanulás folyamatát a dinamikus geometriai környezet" egy terepkutatás által adtam adalékot. A megállapításom az, hogy osztálytermi környezetben, megfelelő tanári tervezéssel és irányítással a dinamikus geometriai környezet egyértelműen támogatta a felfedezésen alapuló tanulást: alátámasztó észrevételeket adott a sejtéshez, szimuláció segítségével segítette a probléma megértését, a dinamikus geometriai szerkesztés megvalósítása matematikai ismereteket hívott elő és segítette a reprezentációk közötti váltást. A bizonyítás fázisában a bemutatott órán a GeoGebra már nem kapott szerepet.

Nem osztálytermi környezetben a kép vegyesebb. A házi feladat megoldása során túlsúlyba került a hallgató induktív hozzáállása, a probléma induktív megközelítése: a sejtést, elképzelést a hallgatók a tapasztalatokkal igyekeztek összevetni, az indoklási-bizonyítási fázis többségében felszínesé vált, vagy el is maradt. Ugyanakkor a házi feladat által biztosított kötetlenség újabb tapasztalatok szerzésére, sőt újabb felfedezésekre is ösztönözte a hallgatók egy részét.

Következtetésként levonható, hogy a képzés egyik célja lehet azt elérni, hogy a tanárjelöltek a tantermi instrukciók, kiigazítások és kodifikációk nélkül is képesek legyenek az önálló munkára, beleértve a bizonyítási tevékenységet.

Következtetéseim hangsúlyozottan felsőoktatási tapasztalat alapján lettek megfogalmazva, köznevelési szituációra közvetlenül nem alkalmazhatók, arra újabb kutatásokra van szükség.

Köszönetnyilvánítás

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

Irodalomjegyzék

Ambrus, A. (1995). *Bevezetés a matematikadidaktikába.* Budapest: ELTE Eötvös Kiadó.

Bruner, J. (2004). *Az oktatás kultúrája. Budapest: Gondolat.*

Bruner, J. S. (1974). *Új utak az oktatás elméletéhez.* Budapest: Gondolat.

Laborde, C. (2000). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics, 44,* 151-161.

Lakatos, I. (1981). *Bizonyítások és cáfolatok.* Gondolat.

Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record,* 1017-1054.

Pólya, G. (1957). *A gondolkodás iskolája.* Budapest: Bibliotéka Kiadó.

Pólya, G. (1985). *A problémamegoldás iskolája,* II. kötet. Budapest: Tankönyvkiadó.

Pólya, G. (1988). *A matematikai gondolkodás művészete I. Indukció és analógia.* Budapest: Gondolat.

Posamentier, A. S., & Hauptman, H. A. (2006). *101+ Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics: A resorce for Secondary School Teachers.* Corwin Press, Inc.

Ruthven, K. (1989). An exploratory approach to advanced mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 20,* 449-467.

Surányi, J. (1971). Matematikatanulás felfedezésen keresztül. *Kapcsolat, 21.,* 1-3.

Varga, T. (1973). *A matematika tanítása.* Budapest: Tankönyvkiadó.

Varga, T. (1987. december). Az egyszeregy körül. *Kritika,* old.: 28-31.

Yan, X., Mason, J., & Hanna, G. (2017). *An exploratory teaching style in promoting the learning of proof.* CERME10. Forrás: https://keynote.conference-services.net/resources/444/5118/pdf/CERME10_0004.pdf

Törtfa és a „Törpe törtek” vizsgálata

(tapasztalatszerzés, általános sejtés, bizonyítás)

Kosztolányi József

A 75 éves Ambrus Andrásnak
tisztelettel és szeretettel

Fiatal tanárként volt szerencsém tehetséges és érdeklődő 7. és 8. osztályos diákokat magas óraszámban tanítani Szegeden a Radnóti Miklós Kísérleti Gimnáziumban. Ösztönösen, mondhatnám úgy is, hogy szimpátia alapon a felfedeztető módszer alkalmazását választottam. Ehhez kerestem – szintén személyes szimpátia alapján – összetett, nyitott, a vizsgálat során több matematikai területet, témakört is érintő problémákat. Nagyon kellemes emlékeim vannak ebből az időszakból a tanulókkal közös „matematikázásról”. Viszont ebben az időben a problémamegoldási folyamatról, annak elméleti vonatkozásairól keveset tudtam, a matematika, a problémák matematikai megoldási lehetőségei érdekeltek, és nem voltak tudatosak a didaktikai céljaim. Ma már lényegesen tudatosabb vagyok, és ezt Pintér Lajos, Bonifert Domonkos és Szendrei Julianna mellett Ambrus Andrásnak köszönhetem. András „intézményesen” nem tanított, de cikkei, előadásai, beszélgetéseink, az általa javasolt olvasnivalók nagyot formáltak a tanításhoz való hozzáállásomon, szisztematikusabban, árnyaltabban gondolkodó tanárrá tettek. Köszönet ezért.

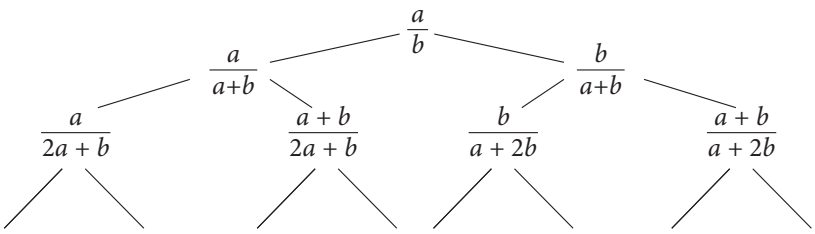
A továbbiakban két olyan nyitott (vagy nyitottá, tanulók általi kutatásra alkalmassá tett) problémát ismertetek, amelyeket több alkalommal dolgoztam fel diákokkal.

I. Törtfa

Az eredeti feladat 1976-ban volt középiskolás versenyfeladat az akkori NSZK-ban. Én [1]-ben találtam rá, és nagyon megtetszett.

Az a és b pozitív egészekre 0 < a < b, valamint a és b relatív prímek. Az $\frac{a}{b}$ *törtből kiindulva képezzük törtek egy végtelen családját a következőképpen:*

1. az $\frac{a}{b}$ *törtnek két „leszármazottja" van, a bal oldali* $\frac{a}{a+b}$ *(az eredeti tört számlálójának és a számláló és a nevező összegének hányadosa), a jobb* $\frac{b}{a+b}$ *oldali (az eredeti tört nevezőjének és a számláló és a nevező összegének hányadosa);*
2. a leszármazottként kapott törtekből kiindulva ugyanígy folytatjuk az eljárást (1. ábra)



1. ábra

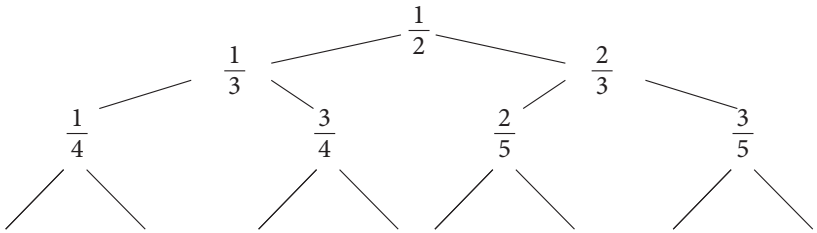
Mely a és b esetén tartalmazza ez a végtelen fa az összes 0 és 1 közé eső racionális számot?

A feladat megoldása $a = 1$, $b = 2$. Ehhez több dolgot be kell bizonyítani, amit a törtfa szisztematikus, irányított (tanári kérdések mentén történő) vizsgálatával fel lehet fedezni.

Két különböző verzióban „tálaltam” a tanulóknak a problémát attól függően, hogy milyen előismeretekkel és képességekkel rendelkeztek.

1. verzió

Induljunk ki az $\frac{1}{2}$ -ből és a fa képzési szabálya alapján készítsük el annak 10 szintjét (az $\frac{1}{2}$ önmagában a 0. szint). A *2. ábrán* az első két szint látható.



2. ábra

Kérdések:

1. Találunk-e az így kapott törtek között egyszerűsíthető törtet? Miért?

2. Általánosan is igaz-e, hogy a végtelen törtfában mindegyik tört *redukált,* azaz tovább nem egyszerűsíthető?

3. Benne van-e a végtelen törtfában az összes 0 és 1 közötti racionális szám?

2. verzió

Induljunk ki az $\frac{a}{b}$ redukált törtből, ahol a és b az eredeti feladat feltételeinek megfelelő *(1. ábra).*

Kérdések:

1. Van-e a végtelen törtfában nem redukált (egyszerűsíthető) tört?

2. Benne van-e (lehet-e) a végtelen törtfában az $\frac{1}{2}$? Hol lehet?

3. Ha az $\frac{1}{2}$ benne van a végtelen törtfában, akkor benne van-e az összes 0 és 1 közötti racionális szám?

4. Sorozatba szedhetők-e a 0 és 1 közötti racionális számok?

Mivel a 2. verzió kérdései magukban foglalják az 1. kérdéseit, ezért az ezekre adható **válaszokkal** foglalkozunk.

1. A tanulók mindkét verzió kapcsán azt sejtették, hogy nem lesz a fában egyszerűsíthető tört. Ennek általános bizonyítása már – érthető módon – nehezebben ment. A bizonyítás alapgondolatának megtalálása végett megcsináltuk egy olyan fának néhány kezdő szintjét, amelynek kiinduló törtje a $\frac{15}{21}$ volt, azaz egy egyszerűsíthető tört. Ez alapján rájöttek, hogy ha lenne egyszerűsíthető tört a fában, akkor utána (a belőle származók) mindegyike egyszerűsíthető lenne. De vajon milyen tört lenne közvetlenül előtte (az egyszerűsíthető tört őse)? A kérdés után már jött a gondolat, hogyan is bizonyítsunk. Közösen, irányítva beszéltük meg a következő indirekt bizonyítást:

Tegyük fel, hogy $\frac{p}{q}$ redukált, de $\frac{p}{p+q}$ nem redukált, azaz egyszerűsíthető. Ez azt jelenti, hogy van olyan 1-nél nagyobb d egész szám, hogy p is és $p + q$ is osztható d-vel. Ekkor viszont $(p + q) - p = q$ is osztható d-vel. Ha p is, q is többszöröse d-nek akkor $\frac{p}{q}$ egyszerűsíthető d-vel, vagyis nem redukált. Ez ellentmond az indirekt feltételünknek, ami azt bizonyítja, hogy ha

a kiinduló tört redukált, akkor a végtelen törtfa összes törtje redukált.

Megjegyzések:
- A leírt indirekt bizonyítás egy *kontrapozíciós* bizonyítás.
- Középiskolában tagozaton vagy szakkörön a *végtelen leszállás* irányába is „kanyarodhatunk" a fenti bizonyítás során.

2. Ennek a kérdésnek a megválaszolásához azt kell észrevenni (több tanuló észre is vette), hogy ha balra megyünk, akkor $\frac{1}{2}$ -nél kisebb, ha jobbra megyünk, akkor $\frac{1}{2}$ -nél nagyobb törtet kapunk. Az 12 tehát csak az „őstört" lehet.

3. Ha az $\frac{1}{2}$ az „őstört", akkor minden 0 és 1 közötti racionális szám benne van a fában. Itt előbb próbákat csináltunk konkrét törtekre visszafelé haladva a fában, és több-kevesebb lépésben eljutottunk az $\frac{1}{2}$ -ig. Általánosan megfigyelhetjük, hogy akármelyik törtből visszafelé indulva a tört nevezője minden lépésnél csökken. A számláló mindig kisebb a nevezőnél, ezért a nevező csökkenésével a számláló sem nőhet. Ezekből a megállapításokból következik, hogy véges sok lépésben el kell érnie a számlálónak az 1-et és a nevezőnek a 2-t.

4. Felülről kezdve szintenként balról jobbra haladva sorszámozni tudjuk a törteket, mivel minden szinten véges sok tört van. A 0 és 1 közötti racionális számok tehát sorozatba szedhetők.

Megjegyzések:
- Ezzel beláttuk, hogy 0 és 1 között megszámlálhatóan végtelen sok racionális szám van. Ennek „mentén" már felső tagozaton lehet mesélni a végtelen számosságokról.

- A tanulók szemléletesen, a számegyenesen rajzolgatva könnyen belátják, hogy bármely két racionális szám között van racionális szám, például a számok által meghatározott szakasz felezőpontjában. Ez azt jelenti, hogy a racionális számok *sűrűn* vannak a számegyenesen, így a 0 és az 1 között is. Szemléletesen ez nehezen fér össze azzal, hogy sorozatba lehet őket szedni. Itt kezdenek el „dolgozni" az absztrakt fogalmak.

Címszavakban néhány, a törtfa vizsgálata során megjelenő új matematikai tartalom: redukált tört; fagráf; indirekt bizonyítás; inverz algoritmus; csökkenő sorozat; megszámlálhatóan végtelen számosság; sűrűség.

További kérdések lehetnek az $\frac{1}{2}$ -del induló törtfára vonatkozóan:

1. Mekkora az egyes szinteken levő törtek átlaga? Miért?
2. Hol jelennek meg a törtfában a Fibonacci-sorozat tagjai? Miért?

II. Törpe törtek

A tanulók kiindulásképpen a következő – mai szemmel nézve kicsit talán bugyuta, de emlékeim szerint jól működő – szöveget kapták:

TÖRPE TÖRTEKNEK nevezzük a 0 és 1 közé eső racionális számokat. A 0 (teljes „nevén" $\frac{0}{1}$) és az 1 (teljes „nevén" $\frac{1}{1}$) tiszteletbeli TÖRPE TÖRT. A TÖRPE TÖRTEK országot alapítottak a derékszögű koordináta-rendszer első síknegyedében az alábbi ***Letelepedési Tört-Törvény*** *alapján:*

(1) *Mivel minden egyes törtnek végtelen sok "neve" van, ezért az egységes nyilvántartás végett minden tört azt a "nevét" köteles használni, amelyre a számláló és a nevező relatív prím.*

(2) *Az* $\frac{m}{n}$ *tört lakhelye a koordináta-rendszer (n; m) pontja (rácspontja).*

(3) *Az* ***n-edik családba*** *tartoznak azok a törtek, amelyek "nevében" a nevező nem nagyobb n-nél. Ha a család tagjai nagyság szerint állnak növekvő sorban, akkor* ***n-edik sorozatnak*** *hívjuk őket.*

A fent definiált, „letelepedett" törpe törtek n-edik sorozatai az n-edik *Farey-sorozatok,* amelyekről bővebben például [2] 269-272 oldalain lehet olvasni.

Először is írjuk fel $n = 2; 3; 4; 5; 6$ esetén az n-edik sorozatokat.

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{1}$$

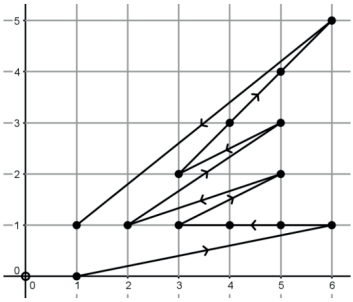
$$\frac{0}{1}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{1}{1}$$

$$\frac{0}{1}; \frac{1}{6}; \frac{1}{5}; \frac{1}{4}; \frac{1}{3}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{1}{1}$$

A 6-odik sorozat tagjainak „lakhelyei" a növekedésnek megfelelő bejárás szerint a *3. ábrán* láthatók.



3. ábra

Kérdések:

1. Az ábráról észrevehető, hogy $n = 6$ esetén lakhelyéről mindegyik törpe látja az origót, azaz lakhelyét az origóval összekötő szakaszon nem lakik másik törpe. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

2. A felírt sorozatokat vizsgálva észrevehető, hogy ha $\frac{p}{q}$ tagja az n-edik sorozatnak, akkor $\frac{p}{p+q}$ is tagja. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

3. A konkrét sorozatokat tanulmányozva az is észrevehető, hogy mindegyik sorozatra teljesül, hogy a bennük levő törtek átlaga $\frac{1}{2}$. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

4. A felírt sorozatok mindegyikében két szomszédos tört különbsége olyan tört, amelynek számlálója 1, nevezője pedig a két nevező szorzata. Általánosan is igaz ez? Próbáljuk bizonyítani.

Válaszok, bizonyítások:

1. Ha valamelyik törpe nem látná az origót, az azt jelentené, hogy az origóból induló megfelelő félegyenesen legalább két törpe lakik. Mivel a félegyenes meredeksége a rá illeszkedő törpék nevezőjének és számlálójának hányadosa, ezért a távolabbi tört egyszerűsíthető lenne, ami a törvény értelmében nem lehet.

Megjegyzések:

- Nem kell, hogy a tanulók ismerjék a meredekség fogalmát, mert az például éppen ennek a kérdésnek a segítségével alakítható ki.
- Itt is indirekt módon bizonyítottunk. Alkalmas ez a kérdés arra, hogy a tanulók számára egyre természetesebbé, kézenfekvőbbé tegyük ezt a gondolatot.

2. Ha $\frac{p}{q}$ nem egyszerűsíthető, akkor $\frac{q-p}{q}$ sem egyszerűsíthető. Ez hasonlóan látható be, mint azt a törtfa esetén tettük. (Kontrapozíciós indirekt bizonyítás.) Emellett teljesül, hogy $\frac{q-p}{q}$ is 1-nél

nem nagyobb tört. $\frac{p}{q} = \frac{q-p}{q}$ akkor és csak akkor, ha $\frac{p}{q} = \frac{1}{2}$. Megfigyelhető $\frac{p}{q}$ az is, hogy $\frac{q-p}{q}$ és az $\frac{1}{2}$ -re szimmetrikusan helyezkedik el az *n*-edik sorozatban.

3. Megfigyelhető, hogy mindegyik sorozatban páratlan számú tört van. Ha az $\frac{1}{2}$ -et külön vesszük, akkor az előző kérdésre adott válasz alapján a többiek $\left(\frac{p}{q}\,;\,\frac{q-p}{q}\right)$ párokba rendezhetők, amely párokban az összeg 1. Ha egy sorozatban $2k+1$ darab tört van, akkor a sorozat elemeinek összege $k+\frac{1}{2}$, így az átlag valóban $\frac{1}{2}$.

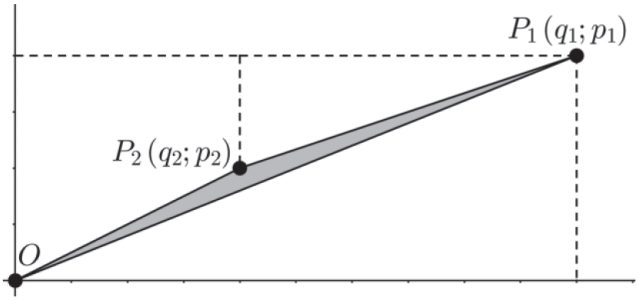
Megjegyzések:

- Megjelenik itt az összegzés könnyebbé (általános esetben elvégezhetővé) tételére egy sokszor és hatékonyan alkalmazható gondolat, a párosítás gondolata.
- A gyerekek a szimmetriát is, a párosítás lehetőségét is észrevették, és nagy volt az öröm, hogy milyen szép így.

4. Ennek az észrevételnek az általános bizonyítása a korábbiaknál lényegesen nehezebb és összetettebb. Viszont geometriai természetű, ami az eddigiekhez képest reprezentációváltást jelent.

Vegyünk egy tetszőleges sorozatból két szomszédos törtet és tekintsük a „lakhelyeiket", azaz a megfelelő rácspontokat: $P_1(q_1;p_1)$, $P_2(q_2;p_2)$.

Legyen $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, és tekintsük a két pont és az origó által meghatározott OP_1P_2 háromszöget *(4. ábra)*



4. ábra

Mivel a két tört szomszédos az adott sorozatban, és nem egyszerűsíthetők, ezért (lsd. 1. kérdésre adott válasz) az OP_1P_2 háromszögnek sem a határán, sem a belsejében nincs rácspont, azaz *üres rácsháromszög.* Előbb részfeladatként azt vizsgáltuk meg a gyerekekkel, hogy mekkora egy ilyen háromszög területe. A vizsgálat a [2] 258. oldalán leírtaknak megfelelően történt, ezért erre részletesen nem térek ki. Kaptuk, hogy minden üres rácsháromszög területe $\frac{1}{2}$.

Mivel $\frac{p_2}{q_2} - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p_2q_1 - p_1q_2}{q_1q_2}$, ezért azt kell bizonyítanunk, hogy $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$. Evégett a *4. ábrán* látható téglalap területét írjuk fel kétféleképpen. Egyrészt p_1q_1. Másrészt egy derékszögű trapéz, két derékszögű háromszög és az OP_1P_2 háromszög területének összege,

azaz $\frac{(p_1 + (p_1 - p_2)) \cdot q_2}{2} + \frac{(p_1 - p_2) \cdot (q_1 - q_2)}{2} + \frac{p_1 \cdot q_1}{2} + \frac{1}{2}$.

A két kifejezést egyenlővé téve, nem túl bonyolult számolás után adódik, hogy $p_2q_1 - p_1q_2 = 1$.

Megjegyzések:

- Az észrevétel, és annak bizonyítása a rácsgeometriai alapismeretek felé terel. Bizonyos állításokat (pl. üres rácsháromszög területe ½) felső tagozatos matematikatudással lehet tárgyalni. A gyerekek szerették ezt a kis rácsgeometriai kiruccanást.

- Az algebrai természetű állítást geometriai úton bizonyítottuk. Ez a tipikus reprezentációváltás nagy sikert aratott a diákok körében.

Irodalom:

[1] Cofman, Judita: *What to Solve? – Problems and Suggestions for Young Mathematicians,* Clarendon Press, Oxford, 1990

[2] Reiman István: *A geometria és határterületei,* Gondolat Kiadó, Budapest, 1986

Matematika-és informatika-didaktika doktori képzés

Lajkó Károly (Debrecen-Nyíregyháza)

E történeti áttekintéssel tisztelgek Ambrus András barátom és „harcostársam" 75. születésnapján, megörökítve a címben jelzett képzés indításában és megvalósításában játszott megkerülhetetlen szerepét.

1. Az akkreditációs pályázat előzményei

Az 1993. évi törvény a felsőoktatásról meghatározta a tudományos továbbképzés és fokozatszerzés új rendjét.

A PhD (doktori) programok 1994-es akkreditációját követően három egyetemen (akkori nevükön ELTE, KLTE, JATE) elindult a matematika és/vagy informatika doktori program, több alprogrammal.

A 90-es évek közepétől a matematika szakképzést és oktatást folytató egyetemek és főiskolák megfelelő intézeteinek és tanszékeinek rendszeres találkozóin (melyeknek két alkalommal Szeged, egyszer pedig Pécs volt a házigazdája) megállapítottuk, hogy az új doktori képzésből kimaradt a matematika- (és általában a szak-) módszertan. Így a matematika-didaktika szakterületen dolgozó egyetemi és főiskolai oktatóknak, vagy a közoktatás tanárainak, szemben a korábbiakkal, megszűnt a tudományos fokozatszerzés lehetősége, illetve legfeljebb csak a pedagógiához és pszichológiához kapcsolódva maradt erre esély. Ezzel, egyrészt az elbírálás eltávolodott a szakmától, másrészt a máshol szerzett fokozat szakmai elfogadása, elismerése is kérdőjelessé vált. Ekkor még az informatika-módszertan hazai művelése eléggé gyermekcipőben járt, így ezzel nem igazán foglalkoztunk. Az 1997-es, pécsiek által szervezett találkozón,

alapos vita után úgy döntöttünk, hogy az 1998-ra tervezett újabb megbeszélés házigazdája (Debrecen) készítsen konkrét javaslatot a matematika-didaktika doktori képzés akkreditálásának kezdeményezéséhez.

1997 december 15.-i keltezéssel, Bácsó Sándor igazgató és Lajkó Károly szervező aláírásával, meghívót küldtünk a korábbi találkozókon résztvevő intézetek/tanszékek vezetőinek, melynek kivonatos tartalma a következő volt:

Tisztelt Igazgató (Tanszékvezető) Úr!

A KLTE Matematikai és Informatikai Intézete (a korábbi két szegedi illetve a pécsi tanácskozások folytatásaként) 1998. január 27-28-án Debrecenben megrendezi a matematika szakosok képzésében érdekelt felsőoktatási intézmények újabb találkozóját.

Kérjük, hogy Ön (vagy helyettese) képviselje egységét a tanácskozásunkon és készüljön korreferátummal „A közös matematika-módszertani PhD (doktori) program pályázati anyagának elfogadása" című napirendhez.

Tájékoztatjuk, hogy ehhez a napirendhez még a következő kollégákat hívtuk meg.

Budapest: Hortobágyi István, Ambrus András, Peller József, Petruska György

Debrecen: Gyíres Béla, Losonczi László, Kántor Sándorné, Sümegi László, Kovács András

Nyíregyháza: Czeglédy István, Szalontai Tibor

Szeged: Csákány Béla, Szendrei János, Pintér Lajos, Hajnal Péter,Kincses János, Bonifert Domonkos.

Örülnénk, ha felhívná figyelmünket olyan vezető oktatókra, akik szívesen közreműködnének a tervezett PhD (doktori) program megvalósításában.

E levelet az alábbi intézményvezetők kapták meg:

Kovács Margit (ELTE), Bácsó Sándor (KLTE), Hatvani László (JATE), Pálfalvi Józsefné (ELTE), Szendrei Julianna (TKF, Bp.), Horváth Jenő (Soproni Egyetem), Kiss Péter (TKF, Eger), Győri István (Veszprémi Egyetem), Galántai Aurél (Miskolci Egyetem),

Varecza Árpád (TKF, Nyíregyháza), Schipp Ferenc (ELTE-JPTE), Mészáros Ferenc (TKF, Szombathely).

Az intézményvezetők a következő oktatók meghívását javasolták még:

Nemetz Tibor (ELTE), Temesvári Ágota (Soproni Egyetem), Riman János (KLTE), Németh József (JATE), Kurusa Árpád (JATE).

Az előterjesztés és a korreferátumok megvitatása után, a találkozón hiánytalanul jelenlévő intézményvezetők és az előbbiekben említett vezető oktatók és szakmódszertanosok elfogadták a benyújtandó akkreditációs pályázat főbb elemeit és megbízták a KLTE Matematikai és Informatikai Intézetét, hogy kérje az országos összefogással megvalósítandó matematika-didaktika PhD (doktori) képzés indításának lehetőségét a KLTE Matematika- és Számítástudományok Doktori Programjának alprogramjaként.

A pályázati anyag 1998-ban elkészült, véleményezték az intézmények, a végleges anyagot pedig benyújtottuk a Magyar Akkreditációs Bizottsághoz (MAB).

2. Az akkreditációs pályázat

A pályázati anyag az alábbiakban határozta meg a matematika-didaktika PhD (doktori) alprogram célját:

- Az oktató-kutató utánpótlás szervezett, országosan összefogott, a matematika tudományhoz szorosan kötött képzése a nagy hagyományú és nemzetközileg elismert magyar matematika-didaktika kutatás-fejlesztés területén, s ezzel oktatói-kutatói, tudós-tanári pálya és tudományos karrier perspektívájának megteremtése a fiatal oktatók és a legtehetségesebb matematika tanárok számára.
- Az európai és a magyar matematika-didaktika kutatás-fejlesztés és képzés kapcsolatrendszerének kiszélesítése, egyrészt az alprogram angol és német nyelvű meghirdetésével, másrészt a programban résztvevő hallgatók és oktatók bekapcsolódásával az európai országok (pl. Anglia, Németország) meglévő programjaiba.

- Matematika-didaktikai kutató-fejlesztő központok kialakításának segítése a tanárképző egyetemek és főiskolák matematikai intézeteiben (Budapest, Debrecen, Pécs, Szeged), s ezeken keresztül a matematikaoktatás, az egyetemi és főiskolai matematika-módszertani képzés támogatása és fejlesztése, tanártovábbképző programok és új kutatási projektek indítása, folytatása.
- Összességében (oktatóink, kutatóink és tanáraink összefogásával) a matematika-didaktika, mint önálló tudományág, hazai művelése tudományos rangjának bizonyítása, értékrendjének szigorú kötése a magyar matematika-minősítés gyakorlatához.

Az alprogram jelentőségéről, háttér feltételeiről és rövid tartalmáról a következők szerepelnek a pályázatban:

A matematika-didaktika, bár fejlődésének kezdeti szakaszában van, mára önálló tudományággá vált, és magába foglal minden olyan kutatást, mely a matematika tanulásával és tanításával kapcsolatos, az elemi iskolától a felsőoktatásig. E kutatásokban ötvöződnek az elméleti és gyakorlati módszerek, és interdiszciplináris (más szakterületekhez, továbbá a pedagógiához és pszichológiához kapcsolódó) kötődésük is jelentős.

Korunkban, a tudományok rohamos fejlődésével párhuzamosan, fokozott jelentősége van a „Mit és hogyan tanítsunk?" kérdésének. Az erre adott válaszok pedig meghatározhatják egy-egy ország társadalmi-gazdasági állapotát, jövőjét. Ugyanakkor, meggyőződésünk szerint az általunk adott válasz és a nyomában kialakuló gyakorlat alapvető hatással lesz a magyar matematika további fejlődésére, elért nemzetközi rangjának megőrzésére.

Ezek fényében különösen fontos, hogy az új tudományos képzési és minősítési rendszerbe beágyazódhassanak az egyes tudományterületek módszertanának kutatásai, így a matematika-didaktika is.

Korábban meghatározott céljaink (az oktató-kutató utánpótlás képzése, a nemzetközi együttműködés erősítése, a kutató-fejlesztő központok kiépítése, a matematika-didaktika rangjának bizonyítása) összhangban vannak a matematika-didaktika jelentőségével, s azok színvonalas és a matematika tudományterület kutatói által is

elismert megvalósítása csak a matematika doktori képzésen belül és országos összefogással történhet.

Az alprogram személyi hátterét biztosítja, hogy

- a három tudományegyetemen és a hozzájuk kapcsolódó főiskolákon a matematika- didaktikával közvetlenül foglalkozó oktatók-kutatók száma jelentős (Budapesten 6, Debrecenben és Nyíregyházán 6, Szegeden 4 fő) és döntő többségük tudományos fokozattal is rendelkezik;
- más intézményekben (Eger, Szombathely, Sopron, egyes tanítóképző főiskolák) is folynak módszertani kutatások;
- több olyan tudományos minősítéssel bíró oktatónk van, aki gyakorlati és elhívatott művelője tudományága módszertanának (pl. Petruska György, Nemetz Tibor, Vásárhelyi Éva és Pósa Lajos Budapestről; Gyíres Béla, Fazekas István, Bácsó Sándor, Nagy Péter, Száz Árpád, Lajkó Károly és Kántor Sándor Debrecenből; Szendrei János, Németh József, Pintér Lajos, Kurusa Árpád és Hajnal Péter Szegedről; Horváth Jenő és Temesvári Ágota Sopronból; Fehér János Pécsről).

A személyi bázishoz szorosan kapcsolódó tartalmi hátteret a hazai matematika-didaktika kutatások igen széles spektruma biztosítja.

A pályázat megadja az alprogram tervezett kutatási témáit és témavezetőit:

- Az iskolai tanítás és tanulás általános kutatása (Szalontai Tibor);
- A matematika tanterv és tananyag kutatása-különböző iskolafokon és –típusokban, tudománytörténet (Szalontai Tibor, Czeglédy István, Ambrus András, Fazekas István, Bácsó Sándor, Nagy Péter, Lajkó Károly, Kántor Sándorné, Horváth Jenő, Temesvári Ágota, Németh József);
- Az iskolai matematikai teljesítmény kutatása különböző életkorokban és iskolatípusokban (Szalontai Tibor);
- Matematikatanítási módszerek kutatása és fejlesztése külön-

böző iskolafokokon és típusokban (Szalontai Tibor, Ambrus András, Vásárhelyi Éva, Sümegi László, Kántor Sándorné, Kovács András, Horváth Jenő, Temesvári Ágota, Szendrei János, Hajnal Péter, Németh József, Bonifert Domonkos);
- A tanulók matematikai gondolkodásának kutatása és fejlesztése (Czeglédy István, Szalontai Tibor, Kántor Sándorné, Sümegi László, Lajkó Károly, Kántor Sándor, Bonifert Domonkos);
- A problémamegoldás kutatása (Hortobágyi István, Czeglédy István, Sümegi László, Kovács András);
- A felsőfokú matematika oktatás módszertanának kutatása különböző képzési típusokban (Horváth Jenő, Temesvári Ágota, Fazekas István, Száz Árpád, Szendrei János, Kincses János, Kurusa Árpád, Németh József, Petruska György, Nemetz Tibor);
- A matematika tantárgy pedagógia kutatása és fejlesztése, a tanítási gyakorlat helyének és szerepének vizsgálata, a matematika tanártovábbképzés kutatása és fejlesztése (Kovács András, Czeglédy István);
- Matematika és kreativitás (Czeglédy István).

A pályázat tartalmazza e kutatási témák részletes leírását is.

Megadtuk az alprogram tervezett tárgyait (azok tematikáját) és a lehetséges előadókat:

- A matematika-didaktika alapjai (Ambrus András, Czeglédy István);
- A matematika-didaktika kutatások módszertana (Ambrus András);
- A matematikatanítás és tanulás korszerű koncepciói (Szalontai Tibor);
- A matematikatanulás és tanítás pszichológiája (Ambrus András);
- A matematikatanítás időszerű kérdései (Szalontai Tibor);
- A matematikatanítás története (Kántor Sándorné, Szalontai Tibor);
- A matematika fejlődése (Filep László, Kántor Sándorné);

- A matematikai Ismeretszerzés (Peller József);
- Pedagógiai pszichológia (Balogh László);
- A problémamegoldás elméleti alapkérdései (Hortobágyi István, Ambrus András, Kántor Sándorné, Kovács András);
- Komputeralgebrai szoftverek és a multimédia felhasználása a matematika tanításában és tanulásában (Fazekas István, Szalontai Tibor, Vásárhelyi Éva, Kántor Sándorné, Kovács András);
- Számítástechnikai gyakorlatok (Almási Béla, Kuki Attila);
- Algoritmus- és bonyolultság elmélet (Hajnal Péter);
- Az analízis speciális fejezetei (Száz Árpád, Németh József, Petruska György);
- Kombinatorikus és konvex geometria (Nagy Péter, Kincses János, Horváth Jenő, Temesvári Ágota);
- Transzformáció csoportok (Bácsó Sándor, Nagy Péter);
- Válogatott fejezetek az algebrából (Bódi Béla, Szendrei Ágnes);
- Válogatott fejezetek a számelméletből (Győry Kálmán, Gaál István);
- A valószínűségelmélet speciális fejezetei (Fazekas István);
- A valószínűségelmélet és a statisztika oktatása;
- Kurzus választása az egyetemek (ELTE, JATE, KLTE) doktori programjaiban meghirdetett analízis, algebra és számelmélet, geometria, valószínűségszámítás és matematikai statisztika tárgyakból.

Megneveztük az alprogramban résztvevő oktatókat-kutatókat (a korábban szereplő nevek összegzéseként) és megadtuk személyi adataikat is (név, diploma, tudományos fokozat, nyelvismeret, kutatási téma, tudományos közlemények száma, legjelentősebb tíz tudományos munka, hivatkozások és recenziók száma, öt konkrét hivatkozás adatai, kandidátusi és doktori témavezetés adatai, jelentősebb tanulmányutak és együttműködések). Az adatlap végén az oktatók kinyilvánították, hogy részt kívánnak venni az alprogramban, s ezt aláírásukkal hitelesítették is.

3. Didaktika PhD (doktori) képzés 1999-2017

A MAB 1999 áprilisában, a pályázatunkban meghatározott célokkal és tartalommal, akkreditálta a matematika-didaktika doktori képzést a KLTE Matematika és Számítástudományok doktori program alprogramjaként.

1999 májusában a KLTE meghirdette a képzést. A 22 jelentkező felvételi vizsgát tett, melynek végén a felvételi bizottság pontozással értékelte szakmai intelligenciájukat, diplomájukat és addigi tudományos tevékenységüket (a felvételnek nyelvi feltétele is volt: „C" típusú nyelvvizsga). Az 1999/2000-es első félévet 18 doktorandusz kezdte el. Közülük 7-en Budapest, Debrecen, Pécs, Szeged felsőoktatási intézményeiből, 9-en a közoktatásból érkeztek, míg 2 fő határon túli (romániai) magyar volt. Az ezt követő években ennél lényegesen kisebb volt a sikeresen felvételizők száma és a tendencia eléggé hektikus volt (rendre 11, 9, 4, 7, 4, 2, 6,5, 2, 10, 2, 7, 1, 2, 1, 5 , 2 , 4). A képzésre felvettek a KLTE-vel (később a Debreceni Egyetemmel) kerültek hallgatói jogviszonyba, levelező illetve egyéni képzési formában (nagyon ritkán ösztöndíjasként).

A tanulmányi követelmények meghatározásához a pályázatban szereplő tárgyakat (kurzusokat) négy csoportba soroltuk:

- matematikai alapozó tárgyak,
- a matematika alapvető területeihez kapcsolódó tárgyak,
- a matematika-didaktikához kapcsolódó tárgyak,
- általános és kapcsolódó tárgyak.

Az ösztöndíjas és levelező képzésben résztvevő hallgatóknak 6 félév alatt 8 tantárgyból kellett vizsgázni. Az első és második csoportból legalább két, a harmadikból legalább egy tárgyat kellett választani. Az egyéni képzésben résztvevőknek nem volt tanulmányi kötelezettsége. A terveknek megfelelően már az első félévben (és persze később is) több tárgyat több egyetemen is lehetett teljesíteni, de minden tárgyat Debrecen hirdetett meg. Az első félévben még csak 13 tárgy szerepelt a kínálatban, majd ezt fokozatosan növelve, 2004-re már túlléptük a 20 tárgy/félév számot is.

A pályázatban jelzetteken túl egyre több új oktató is bekerült a programba (Budapestről Kovács Katalin, Laczkovics Miklós,

Bezdek Károly Deák Ervin, Molnár Emil és Gromlusz Vincze; Debrecenből Bódi Béla, Daróczy Zoltán, Páles Zsolt, Maksa Gyula, Lajkó Károly és Lakatos Piroska; Szegedről Szendrei Ágnes, Hatvani László, Simányi Nándor és Karsai János; Pécsről Komlósi Sándor), néhányszor új tárgyat is hozva.

A matematika és az informatika szoros együttműködése, elsősorban Debrecenben, szinte az akkreditáció „másnapján" felvetette, hogy a pályázati kérelemben nem szereplő informatika-didaktika kutatások területére is ki kellene terjeszteni a doktori képzést. Ez már 2001 szeptemberére (tehát mindössze két év elteltével) megvalósult. E lépés további új tárgyakat, oktatókat és témavezetőket is „hozott" a programba:

Informatika (Kormos János); Válogatott fejezetek az idősor elemzésből (Ispány Márton); Elsőrendű logikai nyelvek és szemantika (Várterész Magdolna); Adatbázis kezelő rendszerek (Fazekas Gábor); Rendszerelméleti problémák az informatikában (Arató Mátyás); Adatbányászat (Fazekas Gábor); Osztott erőforrás alkalmazói rendszerek (Fazekas Gábor); Számítógéppel támogatott oktatás (Nyakóné Juhász Katalin); Informatika-didaktika (Fazekas Gábor).

A kurzusokat meghirdetők közül ki kell emelni Ambrus András, aki 1999 szeptemberétől gyakorlatilag napjainkig (36 félévben) két-három tárgyat, közel 50 kurzust tartott.

A MAB 2003. évi határozata a doktori iskolák létesítéséről és működéséről két vonatkozásban is érintette programunkat. Egyrészt, a matematika-didaktika alprogramból (az informatika-didaktika imént említett bevonásával is) didaktika program lett a Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolában (a 2007/2008-as tanév végéig e cikk szerzőjének, ezt követően a mai napig Maksa Gyula vezetésével). Másrészt, lehetővé vált, hogy bármely doktori iskolában indítható képzés a szakterület módszertanából. Később ezzel élt a Szegedi Egyetem, legutóbb pedig az ELTE is. Ezzel együtt 1999 és 2017 között a matematika- és informatika-didaktika doktori képzés fő bázisa maradt Debrecenben, továbbra is országos összefogással. Ebben a következő években akár lényeges változás is lehetséges, ami egyáltalán nincs ellenünkre.

A képzési követelmények tartalmazzák, hogy a hallgatóknak fo-

lyamatosan kutatómunkát kell végezni, melyet a témavezetőknek minden félévben igazolniuk kell az indexben, a kreditszámban mutatkozó minősítéssel együtt. A tanulmányi követelmények teljesítését követi, a képzési idő végén, az abszolutórium kiállítása, mely feltétele a továbblépésnek.

A doktori fokozat megszerzésének szakmai követelményeit a következők szerint adtuk meg:

A matematika területén:

- Végezzen a jelölt tudományos kutatómunkát és publikáljon a Math. Subject Classification (MSC) szerint rögzített matematikai témákból. A megítélésben egy pontszámítás az irányadó a különböző típusú publikációkról (pl. egy referált cikk nemzetközi folyóiratban, az oldalszámtól függően, 4-7 pontot ér) és legalább 15 pontot kell elérni, továbbá 2-4 referált folyóiratban megjelent lektorált cikk kell.
- Figyelembe kell venni a kutató-fejlesztő munka visszhangját (hivatkozások, konferencia előadások és poszterek megítélése, szakmai díjak).

Az informatika területén:

- Végezzen a jelölt tudományos kutató-fejlesztő tevékenységet és publikáljon az AMC (Assiciation for Computing Machinery) osztályozási rendszerében szereplő informatikai témákban. A tevékenység megítélésében itt is irányadó egy pontszámítás, melyből 15 pont elérése kívánatos. Figyelembe veendők a megfelelően dokumentált egyéb szakma specifikus produktumok is.
- A kutató-fejlesztő munka visszhangját is figyelembe kell venni.

A fokozatszerzéshez további, meghatározott szintű idegennyelvtudást is igazolni kell az értekezés benyújtásakor.

A disszertáció csak sikeres előzetes vita (házi védés) után nyújtható be.

Ezt követően az illetékes tudományterületi doktori tanács kijelöli a doktori szigorlati és védési bizottságokat, utóbbinak tagjai a bírálók is. Pozitív bírálatok birtokában a tanács kijelöli a doktori védés (nyilvános vita) időpontját, sikeres védés után pedig javasolhatja a fokozat odaítélését az egyetemi doktori tanácsnak.

2016 őszétől (felmenő rendszerben) változott a PhD hallgatók képzésének rendje és időtartama: 8 féléves képzésben tanulnak, mely két részből áll, 4 félév tanulmányi és kutatási szakasz, 4 félév kutatási és disszertációs szakasz. A második szakaszba komplex vizsga letétele után léphetnek a PhD hallgatók és a második szakasz végére készen kell állni a védésre. Ez azt jelenti, hogy lényegesen szigorúbb időhatárokat kell betartania a PhD tanulmányokat vállalóknak, mint korábban, ami egy levelező hallgatónál (munka mellett) nem lesz egyszerű.

A didaktika programban az első védések 2004-ben voltak. Ekkor a következő öt jelölt szerzett tudományos fokozatot:

Perjésiné Hámori Ildikó (Pécs, Az internet és a komputer-algebrai eszközök bevezetése gépészmérnökök matematika oktatásába, Klincsik Mihály vezetésével), Maróti György (Szeged, CAS automata elméleti felhasználásának didaktikai kérdései, Csákány Béla vezetésével), Dályai Péter Pál (Szeged, Függvényegyenletek és egyenletrendszerek tárgyalásának lehetőségei szakkörön, Páles Zsolt és Németh József vezetésével), Gyöngyösi Erika (Debrecen, Számítógéppel segített matematika oktatás a 21. század elején, Bácsó Sándor vezetésével), Sárvári Csaba (Pécs. A számítógép-algebrai rendszerek a főiskolai műszaki informatika szakos hallgatók matematika oktatásában, Klincsik Mihály vezetésével).

2005-től 2017 szeptember végéig további 46 ember szerzett doktori fokozatot, évenként rendre 3, 6, 5, 7, 3, 3, 1, 3, 3, 4, 0, 2, 5 védés volt. A disszertációk témái igen széles spektrumot ölelnek fel, a címek megtalálhatók a doktori.hu honlapon a DE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolát keresve.

Az 51 sikeres védéshez 30 témavezető segített, 15-en legalább két esetben, nevezetesen:

Vásárhelyi Éva 5, Ambrus András 3, Klincsik Mihály 3, Kovács Zoltán 3; Czeglédy István, Daragó József, Fazekas Gábor, Freud Róbert , Hortobágyi István, Horváth Jenő, Nagy Péter, Németh József, Nemetz Tibor, Nyakóné Juhász Katalin és Szendrei Julianna 2-2 doktoranduszt segített.

Matematika-didaktikából 42, informatika-didaktikából 9 disszertáció készült.

A végzettek közül 34-en egyetemi illetve főiskolai oktatók (Budapesten 11, Debrecenben 9, Szegeden 3, Pécsett 2, Miskolcon 2, Egerben 2, Nyíregyházán 2, Baján 1, Kaposváron 1, Szolnokon 1), 14-en középiskolában tanítanak, ketten romániai magyarok és egy albán nemzetiségű.

24 nő és 27 férfi szerzett tudományos minősítést didaktikából, míg a doktori iskola többi (11) programjában 35 nő és 78 férfi.

A bírálati eljárás során minden jelölt esetén 3 tagú doktori szigorlati bizottságra és 7 tagú védési bizottságra van szükség. Az utóbbi részeként külön fontos és időigényes feladat a 2 bíráló személyének kiválasztása. Az 51 védés esetében ez 153 szigorlati bizottsági tagot, 255 nem bíráló VB tagot és 102 bírálót jelent, összesen 510 megbízást, úgy hogy senki sem kaphat egynél több feladatot egy ember esetében. Nem egyszerű feladat ez a doktori iskola és a program mindenkori vezetőinek a javaslattételnél. Szerencsére ritkán hárítják el a felkérést oktatóink.

A legtöbb megbízatást vállalók és teljesítők nevét itt is meg kell örökítenünk. A doktori szigorlati bizottságokban legtöbbet szereplők: Ambrus András 19, Kántor Sándorné 14, Hortobágyi István 11, Maksa Gyula 10 alkalommal.

A védési bizottságokban (nem bírálóként) Lajkó Károly 22, Nagy Péter 15, Hortobágyi István10, Kovács Zoltán 9, Páles Zsolt 9, Ambrus András 8, Vásárhelyi Éva 8, Fazekas Gábor 8 alkalommal szerepelt.

Bírálóként Kovács Zoltán 14, Vásárhelyi Éva 12, Ambrus András 9 esetben működött közre.

Érdekes lehet az alábbi egyszerű összesítés: Ambrus András 36, Lajkó Károly 28, Kovács Zoltán 27, Vásárhelyi Éva 23, Hortobágyi István 21, Nagy Péter 20, Kántor Sándorné 17, Páles Zsolt 12, Bácsó Sándor 11, Daróczy Zoltán 10, Klincsik Mihály 10 megbízást kapott.

A fenti adatokat „kézzel" gyűjtöttem a nem mindig hiánytalan adatbázisokból, így nem teljesen megbízhatók, de a tendenciákat (nagyságrendeket) bizton mutatják.

A didaktika doktori programnak „helyet adó" debreceni Matematika- és Számítástudományok Doktori Program majd Iskola vezetői, Daróczy Zoltán (1993-2008) és Páles Zsolt (2008 -) pro-

fesszorok, szinte ideális hátteret biztosítottak a képzésben résztvevő hallgatóknak és oktatóknak. Köszönjük!

Az egyetem habilitációs joga azon tudományágakra terjed ki, amelyekben doktori képzésre és doktori fokozat odaítélésére is jogosult. Így a didaktika doktori képzés hozadéka, hogy a Debreceni Egyetem habilitált négy matematika- illetve informatika módszertannal foglalkozó egyetemi oktatót is: Zsakó László, ELTE, 2007; Ján Guncaga, Rózsahegy, Szlovákia, 2010; Lilla Korenová, Pozsony, Szlovákia, 2015; Herendiné Kónya Eszter, DE, 2016. Az ELTE két oktatója (Vásárhelyi Éva és Vancsó Ödön) Ausztriában habilitált.

4. A „Teaching of Mathematics and Computer Science" (TMCS) folyóirat

A magyarországi módszertani kutatások presztízse, a doktori képzés elindítása matematika- és informatika-didaktikából, annak felismerése, hogy a módszertani kutatások publikálási lehetősége meglehetősen korlátozott, arra ösztönzött bennünket, hogy megszervezzük egy nemzetközi módszertani folyóirat kiadását. Ezt felgyorsította Cofman Judit professzor egyetemünkre kerülése.

A KLTE Matematikai és Informatikai Intézetének tanácsa először 2001-ben tárgyalt, majd 2002-ben döntött a TMCS nemzetközi folyóirat indításáról. Egyben megbízta a szerkesztőbizottságot, a tanácsadó testületet és a kapcsolódó szakmai stábot.

A 27 tagú szerkesztőbizottságba a két szakterület 17 vezető hazai és 10 külföldi oktatója, míg a 14 tagú tanácsadó testületbe 11 hazai és 3 külföldi oktató-kutató került. A szakmai stábba Lajkó Károly (menedzser szerkesztő), Nyakóné Juhász Katalin (technikai szerkesztő), Bujdosó Gyöngyi (tördelőszerkesztő), Bognár Katalin és Juhász István (marketingesek) kapott megbízást.

Jelenleg a szerkesztőbizottság 25 (17 hazai, 8 külföldi), a tanácsadó testület pedig 15 tagú (14 hazai, 1 külföldi). A szakmai stáb felállása: Maksa Gyula (menedzser szerkesztő), Herendiné Kónya Eszter (technikai szerkesztő), Mészáros Fruzsina (tördelő szerkesztő). Az első és a jelenlegi szerkesztőbizottságban 10 tag azonos

(Alsina, C. , Ambrus, A., Bukovsky, L. Fazekas, G., Hortobágyi, I., Horváth, Gy., Kántor, T., Michalewicz, Z., Szabó, J., Zsakó, L.), míg a tanácsadó testületben ez a szám 7 (Daróczy, Z., Demetrovics, J., Győry, K., Laczkovich, M., Nagy, P.T., Pap G., Stachel, H.).

Kezdetben kéziratot angol, német és francia nyelven lehetett benyújtani.

A folyóirat első kötetének első füzete 2003 tavaszán jelent meg, többnyire felkért szerzők cikkeivel. Eddig 14 évfolyam 28 száma és egy (INFODIDACT 2008 konferencia riport kötet) különszám jelent meg. A megjelentetés anyagi hátterét döntően a debreceni Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, később részben a debreceni Informatika Doktori Iskola biztosította.

Az első öt év tapasztalatai alapján a következő változtatásokról döntöttünk 2008-ban:

- A francia nyelvű kéziratok fogadását megszűntettük, a lektorálási nehézségek és ezen cikkek kisebb olvasottsága miatt.
- Korlátot szabtunk az elfogadott cikkek terjedelmére.
- A 400-450 oldalnyi éves terjedelmet, a fentebbi korlátozással is összhangban, nagyjából 300 oldalra csökkentettük.
- Kértük az Informatikai Doktori Iskola és a hazai felsőoktatási intézmények matematikai és informatikai egységeinek fokozott támogatását a folyóirat szellemi, erkölcsi és anyagi hátterének biztosításához.

Sajnos, Debrecenen túlról (néhány előfizetéstől eltekintve) anyagi támogatás nem érkezik. Ugyanakkor a kéziratok lektorálásában sokat segítenek a budapesti, szegedi, nyíregyházi és pécsi kollégák is. Ezt és a szerkesztőbizottság legaktívabb tagjainak (Ambrus András, Daróczy Zoltán, Fazekas Gábor, Horváth Gyula, Kántor Tünde, Nagy Péter, Pap Gyula, Zsakó László) segítségét is köszönet illeti.

A 14 évfolyam 28 füzetében 400-nál több szerző 317 cikke és konferencia összefoglalója jelent meg, majdnem 5000 oldalnyi terjedelemben. A cikkek 2/3-a hazai, 1/3-a külföldi szerzőtől és mintegy 30%-a doktorandusz hallgatóinktól származik. A matematika- illetve informatika-didaktikához kötődő cikkek aránya 4:1.

Ma a legnagyobb problémát a kevés benyújtott kézirat és részben ennek következményeként a kevesebb megjelent cikk jelenti.

A 2016-os év két füzetében 7-7 cikk volt, 2017-ben pedig várhatóan csak egy füzet jelenik meg. Ez a tendencia és a doktori képzésre jelentkezők számának csökkenése együtt már igen elgondolkodtató.

5. Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások (MIDK) konferenciák

A didaktika doktori program javaslatára a DE Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskolája 2008-ban úgy döntött, hogy „Matematika és Informatika Didaktikai Kutatások" (MIDK) címmel elindít egy konferencia sorozatot, ezzel is segítve és ösztönözve a matematika- és informatika-didaktikai kutatásban érdekelt kutatók, közöttük a didaktika doktori képzésben résztvevők kutatásait és együttműködését. A konferencia sorozat célja az is, hogy a szakterület kutatói folyamatosan követhessék egymás eredményeit, a PhD hallgatók előadhassák új eredményeiket és megismerhessék a vezető kutatók véleményét előrehaladásukról.

Az első konferenciát 2009 januárjában tartottuk Debrecenben, a debreceni Matematika- és Számítástudományok Doktori Iskola, az Informatikai Kar, a Kölcsey Ferenc Református Tanítóképző Főiskola és az MTA Debreceni Tagozatának támogatásával, a Herendiné Kónya Eszter vezette szervezőbizottsággal.

A 49 magyar anyanyelvű résztvevő (közöttük 15 PhD hallgató) 4 ország 18 városából érkezett és 29 intézményt képviselt. A konferencián elhangzott 24 előadás és 10 poszter a következő témákra fókuszált: új módszerek a tanításban, tanítási kísérletek és eredményeik közlése, tehetséggondozás, a matematika és informatika története. A konferenciáról 20 oldalas összefoglaló jelent meg a TMCS 7/1-es számában 2009-ben, néhány hónappal a rendezvény után.

A második MIDK színhelye is Debrecen volt 2010 januárjában. Most 42 résztvevő (közöttük 16 PhD hallgató) volt, akik 5 ország 14 városából érkeztek és 25 intézményt képviseltek. A TMCS 8/1 kötetében megjelent összefoglaló 24 előadást és 4 posztert regisztrál, melyek közül 17 –et PhD hallgatók készítettek. A támogatók és a szervezők többnyire az előző konferencia szerintiek voltak.

A következő MIDK konferenciák helyszínei (a résztvevők, előadások/PhD-s előadások száma): Szatmárnémeti (46, 34/12), Lőcse (66, 54/25), Nagyvárad (61, 50/25), Eger (58, 43/18), Újvidék (70, 40/14), Pozsony (60, 47/15), Budapest (55, 43/19). Herendiné Kónya Eszter főszervező munkáját a helyi szervezőbizottságok segítették,rendre Baranyai Tünde, Jan Guncaga, Debrenti Edit, Oláhné Téglási Ilona, Sztankov Gordana és Djudjica Takacsi, Lilla Korenová és Edita Partova, továbbá Vancsó Ödön vezetésével.

Minden konferencián voltak meghívott előadók:

2009-ben Páles Zsolt, Ambrus András, Pásztorné Varga Katalin, Szendrei Julianna; 2010-ben Vásárhelyi Éva, Kovács Zoltán, Maksa Gyula; 2011-ben Nagy Péter, Ambrus András, Kristály Sándor és Varga Csaba (Kolozsvár); 2012-ben Bernd Zimmermann (Jéna),Kosztolányi József, Viola Gazdiková (Rózsahegy), Jacek Stando (Lodz), Edita Partová (Rév-Komárom), Lilla Korenova (Pozsony); 2013-ban Sara Hershkovich (Tel Aviv), András Szilárd (Kolozsvár), Bessenyei Mihály, Várterész Magdolna; 2014-ben Hoffmann Miklós, Zsakó László, Emilia Velikova (Rusze), Vásárhelyi Éva; 2015-ben Kovács Zoltán, Marina Cicin Sain és Snjezana Bakic (Pula), Csíkos Csaba, Takácsi Árpád (Újvidék); 2016-ban Ambrus András, Andrej Ferko (Pozsony), Edita Patrová (Pozsony), Hajdú Lajos; 2017-ben Zsakó László, Alex Friedlander (Izrael), Páles Zsolt, Faragó István.

Megemlékezés

Gyászoltuk és gyászoljuk a didaktika doktori program előkészítésében és megvalósításában résztvevő elhunyt kollégáinkat, barátainkat:

Arató Mátyás, Bognár Katalin, Bonifert Domonkos, Cofman Judit, Daragó József, Filep László, Gyíres Béla, Kiss Péter, Kormos János, Kovács András, Nemetz Tibor, Nyakóné Juhász Katalin, Peller József, Sümegi László, Szendrei János, Szendrei Julianna, Varecza Árpád, Herbert Zeitler.

Emléküket kegyelettel őrizzük.

Irodalom

(1) Pályázat PhD (doktori) képzés és fokozatadás jogának kiterjesztésére, Matematika tudományágban B típusú akkreditációra, Debrecen 1998.

(2) MAB állásfoglalás Doktori Iskolák Létesítéséről és működtetéséről, MAB 2003.

(3) Lajkó Károly és Nyakóné Juhász Katalin, Tudományos kutatások módszertanból, Informatika a felsőoktatásban konferencia, Debrecen, 2008.

(4) Nyakóné Juhász Katalin, Kósa Márk, Pánovics János és Lajkó Károly, Öt éves múlt a TMCS, Informatika a felsőoktatásban konferencia, Debrecen, 2008.

(5) Reports on Meetings, TMCS 7/1 – 16/1. 2009-2016.

(6) Doktori adatbázisok, Doktori.hu

Lajkó Károly
Debreceni Egyetem Matematikai Intézet
Nyíregyházi Egyetem Matematika és Informatika Intézet
H-4010 Debrecen Pf. 12
E-mail: lajko@science.unideb.hu

Nagy Ildikó írása

„Egy olyan tanárnak,
aki a lelkét is beleteszi a tanításba,
mindig megvan a hozadéka.
Ott a diákok máshogy állnak a dolgokhoz.”
(Lovász László)

1985-ben végeztem az ELTE TTK matematika-fizika tanári szakán, azóta tanítok. Három gyermeket neveltem fel, és ha megkérdezik tőlem, mi a hobbim, akkor úgy válaszolok, hogy a családom és a hivatásom. Tudatosan választottam ezt a szakmát, de a tanárság számomra nem csupán egy tanult szakma, hanem elköteleződés és ténylegesen kedvelt időtöltés. Tanítás – a szó legnemesebb értelmében. A családom után az első.

Amikor kedves egyetemi tanáromtól felkérést kaptam arra, hogy írjak készülő emlékkönyvébe, nagyon nagy megtiszteltetésnek vettem. Abban a szerencsés helyzetben vagyok, hogy Ambrus András Tanár Úr egész pályámat végigkíséri évek, sőt évtizedek óta. Ő nem „csupán” egyetemi illetve doktori iskolai tanárom és konzulensem, hanem pedagógiai, didaktikai vezetőm, tanácsadóm is egyben. Olyan ember, akihez mindig fordulhatok, ha kérdésem, vagy tervem van, olyan ember, aki érdeklődéssel meghallgat, ha be szeretnék számolni aktuális tevékenységemről, és olyan ember, akitől mindig számíthatok okos tanácsokra. Az emlékkönyvbe való írásra szóló felkérésben azt írta, hogy nem a személyének méltatását kéri, hanem azt, hogy számoljunk be saját kutatási eredményeinkről, adjuk közre saját pedagógusi tapasztalatainkat, és mondjuk el, hogy „mit tanultunk Ambrustól”. Írásomban erre a kérdésre szeretnék reflektálni pedagógusi és kutatási tapasztalataim megosztásával.

Hogy mit tanultam Ambrus Tanár Úrtól? Természetesen matematikát, matematikául gondolkodni, a tanításhoz módszertant. De nem „csak” ennyit! Ennél sokkal, de sokkal többet! Megtanultam

azt, amit nem lehet könyvekből, azt, hogy figyelni kell a gyerekre, követni és megfigyelni a tanuló gondolatait, alázattal, szeretettel, odaadással, hittel. Példát láttam emberségből, kitartásból, szakmaszeretetből és önzetlen, gyermekközéppontú pedagógusi büszke alázatból.

Én csupán egy tanítványa vagyok a sok közül, de biztos vagyok abban, hogy van köze ahhoz, hogy mit vallok a pedagógiáról, és, hogy hogyan tanítok. Szeretem, szépnek és fontosnak tartom a tantárgyaimat, szeretettel tanítom a tanítványaimat és ez a pozitív érzelmi megközelítésegész pályámat meghatározza. A tanítási-nevelési tevékenységem folyamatában elengedhetetlen részemről a jószívű, személyiségközpontú, emberi hozzáállás. Ugyanannyira fontosnak tartom a gyengébben teljesítők sikerélményhez juttatását, mint a tehetségesebbek felkarolását. Minden tanítványomat igyekszem ösztönözni arra, hogy akarjon több és jobb lenni. Arra nevelem őket, hogy tudatosodjon bennük a tudás megszerzésének öröme, szépsége és az ok-okozati összefüggések feltárásának igénye.

Módszertanilag színes órákat szeretek tartani, fontosnak tartom, hogy a tanulókat foglalkoztassam, és mindig lekössem a figyelmüket. Páros, csoportos, projekt alapú és frontális módszereket felváltva alkalmazok. Fontosnak tartom, hogy a tanulók többféle szimbolikus síkon tudják magukat kifejezni, így az írásbeliség mellett nagy hangsúlyt fektetek a szóbeliségre. Lehetőséget adok kifejtésre, vitákat generálok az adott téma elmélyítése érdekében, kedvelem és provokálom az interaktív szituációkat. A matematika és a fizika axiomatikus felépítése, bizonyítási igényessége, diszciplinaritása, az egymást kölcsönösen generáló elvont illetve empirikus jellege hozzásegítenek ahhoz, hogy tantárgyaimon keresztül a tiszta, de kritikus gondolkodás, a tisztességes, korrekt emberi viselkedés igényére tudjam nevelni a felnövekvő generációt. Pedagógusi elkötelezettségem a sokéves pályán töltött tapasztalatom során folyamatosan erősödött. Célom mindig a tanulók tudáshoz juttatása, legjellemzőbb eszközöm ehhez a pozitív motiváció.

Egy nemzetközi matematikatanítási konferencián előadásomat azzal a kérdéssel kezdtem, hogy *„Do students like mathematics in your country? What are your experience?"* Mosolyogva ingatták

a külföldi matematikatanárok a fejüket. Ha Magyarországon tennénk fel ugyanezt a kérdést, hogy *„Vajon szeretik-e a magyar tanulók a matematikát?”*, akkor sajnos ugyanazt a nemleges választ kapnánk, mint a világ bármely országában. Hogy mi lehet ennek az oka, arra számos köznapi és tudományos választ találhatunk. Gyakran hallani megengedő indokként, hogy *„annak idején még a szüleik sem szerették, hisz erre születni kell”*.

A társadalom nagy része úgy gondolja, hogy a matematika nehéz, és mivel a környezet is ezt sugallja, a tanulók többsége társadalmilag is felmentést talál a tantárgy megértése és ezzel párhuzamosan a tantárgyhoz való pozitív hozzáállása alól. Kitartás és kedv hiányában a sikerélmény is elmarad, a helyébe érdektelenség lép, ennek pedig egyenes következménye a középiskolában már szinte pótolhatatlan lemaradás. Továbbá *„a matematika összetettsége, absztraktsága és összetett feladatai miatt sok nehézséget okozhat a tanulóknak, a sikertelenség miatt elveszíthetik az önbizalmukat, magukat gyengének, értéktelennek tartják.*” (Ambrus András) Korábbi kutatásokból ismert az a tény is, hogy az iskolai évek előrehaladtával a legtöbb tanuló esetében a tanulási motívumok erőssége jelentős mértékben csökken, és a tantárgyak közül a matematikát csak a kémia és a fizika „előzi meg” a közkedveltségi lista negatív ágában. (Csapó 2000; Csíkos 2012)

„Legfontosabb, fiam, a Szeretet!”
(Szabó Lőrinc: Szeretet)

Sokszor eszemben van az Ambrus Tanár Úr által oly sokszor emlegetett példa, melyben egy külföldi tanárdelegáció egyik tagja magyar matematika órát látogatván azt mondta, hogy ők *„gyereket tanítanak, nem matematikát”*. Tanár Úr ezt nem azért emlegeti, mert azt akarná vele sugallni, hogy mindent rendeljünk alá a gyermek kénye-kedvének, félretéve a tantárgyat, hanem pontosan ellenkezőleg, miszerint úgy tanítsuk meg a matematikát, hogy közben soha ne feledjük, hogy nekünk a gyereket kell megtanítanunk matematikára, nem pedigodadobni a matematikát a gyerek elé. Nem elé-

gedhetünk meg azzal, hogy „leadtuk az anyagot". Egy igazi pedagógusnak mindig figyelnie kell a gyerekre, a gyermek gondolkodási folyamatára, és mindez éppen ott és akkor lehet a leghatékonyabb, amikor a gyermek gondolatait követjük,inspiráljuk a gondolkodásra, rávezetjük a helyes út kiválasztására. Ez a legnagyobb tett, amit egy pedagógus véghezvihet folyamatos módszertani megújulással, folyamatos fejlődéssel, szorgalommal, és feltétlenül felvértezve biztos szakmai tudással. Az ókori görögöknél még csupán kísérte a „παιδαγωγός" a gyereket, a rómaiak *„paedagogus"*-a már nevelte is, az újabb és legújabb korban a *„pedagogue"* azaz pedagógus pedig tanítva nevel és vezet.

„A matematikához nem vezet királyi út."
(Euklidesz után szabadon)

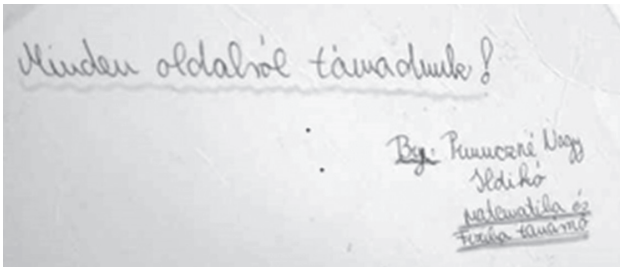
Természetesen tudás átadása nélkül nem lehet tudományt tanítani. Bármely tudományág, bármely művészeti alkotás megismerhető könyvekből, tapasztalatból, a mai világban minden információ rendkívül gyorsan hozzáférhető az internetről Ugyanakkor az igazi megértéshez, a gondolatok vezetéséhez, az alapvetések és összefüggések megismertetéséhez nélkülözhetetlen a perszonális kontaktus, a tanári tevékenység. Mindenekfelett igaz ez a matematikára, mert a matematika tanításával nem „csupán" magát a tudományt ismertetjük meg tanítványainkkal, hanem olyan gondolkodási folyamatokat tanítunk és hívunk elő a tanítványok gondolataiból, amelyek széleskörűen alkalmazhatóak az élet számos területén.

Modern korunkban olyannyira felgyorsult az információáramlás, hogy a technika vívmányainak áldásos, vagy éppen káros hatásai korunk gyermekeit talán az előző generációkhoz képest is sokkal feltűnőbben türelmetlenné tették. A tudás megszerzéséhez vezető rögös utat nem mindig van türelmük végigjárni, hamar eredményhez szeretnének jutni. Ugyanakkor nagy előnye korunknak, hogy ma a gyermekek nyitottabbak, kommunikatívabbak, bátrabban és könnyedebben megfogalmazzák aggályaikat is. Többször tapasztalom, hogy

a tanítványaim jajgatnak, hogy de miért kell ezt vagy azt a matematika órán tanulniuk, és megkérdezik, hogy *„Mi szükségünk lesz nekünk erre az életben?”* Ilyenkor azt szoktam válaszolni, hogy a matematika egyfajta torna, az agytornáztatása. Edzünk, csak éppen nem úgy, mint testnevelés órán. Itt nem a teljes testünket trenírozzuk, 'csupán' az agyunkat. Amikor már századjára futjuk azt a bizonyos kört a tornaórán, akkor senki sem mondja, hogy miért megyünk erre, hisz már jártunk itt! Mindenki tisztában van vele, hogy sportolás közben edzük izmainkat, ezért nem kérdőjelezi meg senki a körbefutás létjogosultságát. A matematikával pedig – szoktam mondani – az „agytekervényeinket” járatjuk be. Egyrészt azért, hogy amikor egy újabb feladat vagy probléma kerül elénk, legyen lehetősége az emlékezetünknek keresgélni a megismert, bejáratott gondolatmenetek között. Másrészt pedig, amikor arra van szükség, hogy egy ismeretlen, összetett, akár egy hétköznapi problémát oldjunk meg, akkor legyen képes az agyunk az addig bejáratott gondolatmeneteket kombinálni, és ha szükség van rá, új ötleteket hozzáadni. Ez nem megy anélkül, hogy ne lennének megfelelő ismereteink, de anélkül sem, ha még soha nem „futottuk be azokat a köröket”. Ezért gyakorolnunk kell gondolkodni, és erre a legalkalmasabb a matematika. Persze, nincs új a Nap alatt! A tanulóknak ezt a fajta türelmetlenségét már Krisztus előtt 300 körül a nagy ókori matematikusnak és tanítónak is el kellett szenvednie. Ugyanis, amikor I. Ptolemaiosz megkérdezte, hogy vajon a geometria megtanulásának nincs-e rövidebb és könnyebb módja, mint ahogy az az Elemekbenle van írva, akkor Eukleidész így válaszolt: *„A geometriához nem vezet királyi út.”*

„- Nézzék! Közöttünk a különböző felfogás a különbség.
Ha az én órámon két gyerek hangosan felröhög,
én örülök, hogy jól érzik magukat.
Maguk pedig azt gondolják, hogy fegyelmezetlenek.
Ez a nagy különbség.
- Honnét tudom, hogy nem rajtam nevetnek?
- Kérem szépen, a paranoiát nem az iskolában kell gyógyítani,
hanem az elmeosztályon.”
(Popper Péter)

A tanítványaimat igaz történetekkel és hétköznapi párhuzamokkal tudom türelemre bírni. Olyan türelemre, amely nem kínból, nem megfelelni-kényszerből, hanem megértésből és belátásból születik. Vallom, hogy mindig kell hozzájuk intéznünk emberi szavakat annak érdekében, hogy érezzék, ők partnerek. Meg kell hallgatnunk őket akkor is, ha ellenkeznek, és örülnünk kell, ha nekünk, pedagógusoknak el merik mondani panaszaikat. Szerintem ez a tanulók motiválásának első lépése. A képletek, tételek, bizonyítások tanításához befogadó közeg kell, és zárt ajtókon kopogtat az a pedagógus, akinek nincsenek frappáns történetei a tanulók figyelmének fenntartása és a nehézségek elfogadtatása érdekében. A motiválás ott kezdődik, hogy elérjük és elfogadtatjuk a tanulókkal személyiségünket és pedagógiai tevékenységünket, időben lereagáljuk felvetéseiket, és ha kell, megmagyarázzuk törekvésünket. Így tudjuk rávezetni őket a matematikatanulás ösvényére. Gyakran szedem bediákjaim füzetét, hogy kijavítsam önálló órai vagy otthoni feladatmegoldásukat. Ilyenkor át is lapozom a füzeteket, kíváncsi vagyok arra, mit és hogyan jegyzeteltek le, vannak-e tipikus hibáik. Ha találok olyat, amely több tanulót is érint, kitérek rá, bármely témánál tartok, és igyekszem a téves értelmezéseket, típushibákat kijavíttatni. Sok minden más is található azokban a füzetekben! A diákok előszeretettel jegyzetelik a tanár kiszólásait, így egy füzet megtekintésekor bukkantam a következőre:



Talán erős kifejezés, de élő szóban könnyebben mond ki olyat az ember, amit nem biztos, hogy papírra is vetne. Megteszik ezt helyettünk diákjaink, olykor kellemetlen helyzetbe hoznak vele bennünket. Kicsit furcsa volt szembesülnöm elszólásommal, de

belegondoltam, tulajdonképpen igaz, valóban minden oldalról „támadunk". Minden irányból meg kell közelítenünk a gyermek agyát: lélektani és értelmi oldalról egyaránt azért, hogy megnyerjük a matematikának. A tanulók többségét erősen motiválni kell, és erre az összes tantárgy közül a matematika szorul rá leginkább. Itt megjegyezném, hogy az idézett mondásom nem egyszeri alkalom volt. Mondom akkor is, ha egy feladatot többféle úton közelítünk meg, rajzolunk, eljátsszuk, számolunk, fordított irányban következtetünk, logikai úton levezetjük, vagy, mint például a koordinátageometriában, egyszerre dolgozunk a matematika több ágával, nevezetesen a geometriával, analízissel, algebrával.

A motiváció nem állhat meg az elfogadásnál, követnie kell az érdeklődés felkeltésének és az érdeklődés szinten tartásának. Ez a hármas egyszerre szükséges ahhoz, hogy eredményesen tudjuk végezni a tanári munkánkat. Természetesen vannak olyan tanulók, akiknek nincs szükségük külső motivációra, náluk belülről jön az érdeklődés, ők képesek hosszú utat megtenni a matematika tanulásában belső indíttatásból is. De ők kisebbségben vannak, és ők is megtorpannak olykor, eljöhet egy olyan pont az ő életükben is, amikor szükségét érezhetika külső megerősítésnek, egy külső elismerésnek. Ambrus Tanár Úrtól sok példát láttam arra, hogyan erősíti lelkileg a tanítványait: hitet ad önmagukban, teszi mindeztagondolkodásbeli szabadság biztosításával ésa rendszeres dicsérettel. Igen, dicsérni kell a tanítványt, minden helyes lépését lereagálni, mert akkor fog hozzá jókedvvel újabb feladatokhoz, akkor figyel az új ismeretek tanulásakor, és az így nyert örömérzetből táplálkozhat a mi matematikatanításunk.

A pozitív hozzáállás fenntartásához az elért eredményeket - bármilyen apróságnak tűnőek lehetnek ezek - de mindig meg kell erősítenünk. Elsősorban dicsérettel szóban, és ha lehet, értékeléssel jó jegy formájában. A gyerekek nagyon tudnak örülni a pozitív megerősítésnek, de csak akkor van hosszú távú hatása a dicséretnek, ha teljesítmény van mögötte. Olyan teljesítmény, amely emlékezteti őket arra, hogy mindezt ők érték el, a saját erőfeszítésükkel és/vagy a saját okos gondolkodásukkal. Amiért megdolgoztak. A tanulás örömforrás kell legyen!

A matematikában az aktuális iskolaszerű példák megoldásán túlmutató örömforrás a probléma megoldása, és a rácsodálkozás öröme.

„Meglátni a szépséget az általános relativitáselméletben, egy szoborban, vagy egy versben - mindegyikhez készség a befogadásra és értelmi erőfeszítés szükséges."
(Simonyi Károly)

„Mehet-e a fizika matematikai problémamegoldó képesség nélkül?" címmel tartottam egy előadást. Célom az volt, hogy rámutassak arra, hogy a fizika tantárgyon belüli tanulmányok sikeressége vagy éppen sikertelensége a tantárgy tapasztalást igénylő sajátosságain túl visszavezethető a matematikai problémamegoldó gondolkodás megfelelő korban lévő fejlesztésének eredményességére, vagy éppen eredménytelenségére. Kutatási eredményeimmel alá kívántam támasztani a matematikai eszközök szükségességét, és azt, hogy a fizika tantárgy tanulása és eredményes tanítása szorosan összefügg a matematikai problémamegoldó képesség fejlettségével, de annak fejlesztése nélkül magának a fizika tantárgynak az elsajátítása is sikertelenségre van ítélve. Elengedhetetlen a matematika megfelelő szintű ismerete, amely egyrészt a könnyed alkalmazást, másrészt a problémamegoldásban való jártasságot igényli. Amióta tanítok, folyamatosan problémaként jelenik meg, hogy a fizika tanításához szükséges matematikai tudásanyagot matematikából időben később tanítjuk, mint a fizikában alkalmaznunk kellene. Ez is okozhatja azt, amit több hazai vizsgálat is kimutatott, miszerint „*a középiskolákból kikerülő diákok egyharmada szinte semmilyen fizikával kapcsolatos tudással nem rendelkezik, világképét az elemi iskola előtti, a közvetlen érzékszervi tapasztalatokon alapuló naiv látásmód jellemzi.*" Gyakran szembesülök továbbá azzal, hogy a tanulók az éppen szükséges matematikai eszközöket a matematika órán kívül nehezebben tudják alkalmazni,és a problémamegoldó gondolkodásuk a fizikában a matematika órán tapasztaltakhoz képest is sokkal nehézkesebb. Csapó Benő 2000-ben közzétett

vizsgálata alapján a fizika tantárgy már akkor a legnépszerűtlenebb a tanulók körében, amikor először kezdik tanulni – ez a 7. osztály – és a népszerűsége csak tovább csökken az iskolában töltött idő alatt, és sajnálatosan mindvégig az összes tantárgyak sorában a legutolsó helyen szerepel. Méltatlanul! A saját tapasztalataim és a hivatkozott kutatási eredmény indított a téma a vizsgálatára.

A fizikai feladatok szemszögéből csoportosítottam azokat a matematikai problémákat, amelyek nélkül egyes fizikai problémák megértése, illetve akár a közép, akár az emelt fizika érettségi feladatsor sikeres megoldása elképzelhetetlen. Akkori 9. osztályos tanítványaim körében tanév elejénegy teljes évfolyamon, ahol matematikát és/vagy fizikát tanítottam, általános iskolai ismereteket igénylő feladatokat oldattam meg. A feldolgozott feladatok közül csak pár egyszerűbbet szeretnék itt bemutatni, először rekét olyan feladatot, amelyeket a számolási kompetenciák vizsgálata céljából választottam. Az első egy 7. osztályos matematika tankönyvben szerepelt, a második pedig 8. osztályos feladat:

Feladat: *Mennyi a következő tört értéke?*

$$\frac{\left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{11}{15}\right) : \left(\frac{1}{6}+0{,}1+\frac{11}{15}\right)}{\left(0{,}5+\frac{1}{3}-0{,}25\right) : \left(0{,}25-\frac{1}{6}\right)}$$

Nyilván avatott szem azonnal észreveszi, hogy a számláló értéke 1, majd a nevezőben is keresi a könnyebb számolás lehetőségét. A vizsgálat eredménye: a tanulóknak 24%-a adott jó megoldást, 76% belebonyolódott a felesleges számolásba. Az összes tanuló 5%-avette észre, hogy a számláló értéke egy, míg 95% végigszámolta, többségében sikertelenül.

Feladat: *Írd át normálalakba a következő számot, és mondd meg, mennyi lesz így10 kitevője!*

$$\frac{1}{2 \cdot 10^4}$$

Annak ellenére, hogy a normálalakkal való számolás a középiskolai évfolyamokon a matematikán kívül egyéb természettudományos tantárgyak esetében is elvárás lenne, mégis csupán 17% adott megfelelő megoldást. 83%-nak vagy nem jutott eszébe a közönséges tört átírása tizedes tört alakba, vagy ha igen, akkor is meghagyta 0,5-es értéken. A tört 5-tel való bővítésének lehetőségévelegy tanuló sempróbált élni. A fizikában különösen gyakoria normálalak használata – többek között a mértékegységek átváltásánál, a nagy, vagy kis számok, a fizikai állandók használatánál. Gyakran tapasztalom azt is, hogy számológéppel próbálkoznak, és akár egy véletlen félreütés miatt keletkezett bármilyen irreális eredménytgondolkodás nélkül elfogadnak. Gyakori a figyelmetlenségből adódó, vagy teljes tájékozatlanságra utaló tévedés, miszerint a számológép kijelzőjén a normálalak sajátos megjelenését nem ismerve, megadják végeredménynek például az $5{,}2^3$-t az $5{,}2 \cdot 10^3$ helyett.

Ambrus Tanár Úr hívta fel a figyelmemet a munkamemória témakörében végzett kutatásaira. A saját tanári gyakorlatom által sokszorosan alá tudom támasztani megállapításait. Tapasztalataim szerint ugyanis a számolási kompetenciák készségszintű hiányából adódó nehézségek elvonják a tanulók figyelmét a problémák megoldásától, ezáltal gátolhatják bármely problémára való koncentrálást mind a matematika, mind a fizika tantárgy esetében. Legjellemzőbben szembesülök ezzel fizika óráimon.

A következő feladat egy olyan egyenlet, amelyet két, egymással rugalmatlanul ütköző test mozgásáról lehet felírni a lendület megmaradásának törvénye szerint, amennyiben ismerjük mindkét test tömegét, ütközés előtti sebességét és az ütközés utáni közös sebességüket szeretnénk kiszámolni. A fizikai probléma feldolgozása utáni, az adatok ismeretében előállított, mértékegységek nélkül felírt egyenletet adtam csupán a tanulók elé:

Feladat: *Oldd meg a következő egyenletet!*

$0{,}1 \cdot 2 + 0{,}2 \cdot 1 = 0{,}1\ x + 0{,}2\ x$

A megoldások eredményét a következő táblázat mutatja:

Helyes megoldás:	10%
Hozzá se kezd:	40%
Hibás megoldás:	50%

Megkérdeztem, vajon mi lehet az oka annak, hogy ilyen nagy arányban hozzá sem kezdtek a megoldásnak? Azt válaszolták, hogy *„nehéz, illetve bonyolult a kapott egyenlet”.* A hiba, amire egyáltalán nem számítottam, a mérlegelv téves használata, miszerint helyes összevonás után a 0,4 = 0,3x alakban kapott egyenlet mindkét oldalából 0,3-et vontak ki, ami után a 0,1 = x megoldást kapták. Így járt el a tanulók fele! 9. osztályban matematikából abban az időben, amikor a fizika órán a lendületet tanítjuk, még nem foglalkozunk egyenletekkel, ezért a fizika tanóra csak az általános iskolai matematika tudásra építhet. A tanulóknak meg kell küzdeniük a fizika tantárgy nehézségeivel, és ha ez sikerül, utána újabb gátakba ütköznek. Így igen nehéz elérni, hogy a fizikát tanító pedagógus a pozitív motiváció eszközével élhessen. Nem csoda tehát, ha a fizika még a matematikánál is népszerűtlenebb.

Hallom - elfelejtem. Látom - emlékszem. Csinálom - megértem.
(Konficiusz)

Még egy feladatot szeretnék itt közzétenni, amely az egyenes vonalú egyenletes mozgás út-idő-sebesség összefüggéséről szól, ugyanakkor egy igen gyakori, a valós életben megjelenő probléma modellezése, abszolút reális felvetés. Ez egy matematika feladat, a Kenguru versenyen 2002-ben szerepelt,az 5-6. osztályosok feladatsorában, amely azt sejteti, hogy az általános iskola felső tagozatát épp hogy elkezdő gyerek is meg tudja oldani. 9. és 10. osztályos középiskolásoknak adtam fel, körülbelül 100 tanulónak, nem csupán a saját tanítványaimnak majd egyik kiválasztott csoportomban a tanórán háromféleképpen oldottuk meg.

Feladat: *Egy kerékpáros a hegyre felfelé 12 km/h, lefelé 20 km/h sebességgel halad, egyenletes sebességgel. Lefelé 16 perccel gyorsabban teszi meg az utat, mint felfelé. Hány km hosszú út vezet fel a hegyre?*

Egyetlen egy diák tudta megadni a helyes választ, a többiek nem tudtak önállóan megbirkózni a feladattal.Az az egy tanuló logikai úton oldotta meg és csak pár számot meg az eredményt írta le a füzetébe. A szerencsésen megválasztott adatok a fejszámolásra lehetőséget adtak. Itt megjegyezném, hogy ez az egy tanuló könnyítést kapott matematikából, hivatalos papírja van arról, hogy neki nagyon nehezen megy a matematika. A többiek is próbálkoztak, de csak sikertelen próbálkozások voltak, számolgatással, egyenlettel, egyenletrendszerrel, rajzzal. Az egyik 9. osztályos csoportban megkérdeztem a tanulókat, mi az oka, hogy nem sikerült megoldaniuk ezt a feladatot, amire a következő válaszokat adták: – *„nehéz”*, – *„ez fizika feladat”* (matematika órán), – *„ehhez jól kell tudni a matekot”* (fizika órán), – *„nincs elég adat”*. A következő válasz a problémamegoldó gondolkodásra való hajlandóság miatt érdekes. Azt válaszolta a tanuló, hogy: *„Azért nem tudom, mert én ilyen feladatot még soha nem csináltam.”* Matematika órán kérdésekkel vezettem őketazon az általuk elkezdett úton, amit a füzetekből kiolvastam. Senki nem váltotta át a km/órát km/percbe, így ezen az úton vezettem tovább őket. Közösen frontálisan összehoztuk, a telefonommal a hanganyagot rögzítettem, és itt szeretném megosztani:

Tanár: Bár nem tudjuk, milyen hosszú a lejtő, de próbálkozzunk! Ha egy óráig megy felfelé, akkor milyen hosszú a lejtő?
Diákok közül valamelyik: 12 km.
T: És ha lefelé jönne egy órán keresztül, akkor milyen hosszú lenne a lejtő?
D: 20 km.
T: Ha viszont csak 4 km hosszú lenne a lejtő, akkor meg tudnánk mondani, hogy mennyi ideig megy felfelé?
D: 20 perc.
T: És mennyi idő alatt érne le a 4 km hosszú a lejtőn?
D1: Biztosan akkor ér le 16 perccel gyorsabban!
T: Miből gondolod?
D1: Gondolom, azért kérdezte ezt a Tanárnő.

D2: 5 perc alatt.
T: Miből gondolod, hogy 5 perc? Számold ki! Tehát jön lefelé 20 km/órával, és 4 km hosszú a lejtő, vagy egyszerűen csak egy jármű 20 km/órával halad, akkor szerinted 5 perc alatt tesz meg 4 km-t?
D3: Dehogy, egyötöd óra alatt.
T: Mennyi az az egyötöd óra, azaz egy órának az ötöde?
D2: 5 perc
T: Hány ember szerint 5 perc az egyötöd óra?
D2: Ja, 12 perc!
T: Felfelé mennyi időbe telt a 4 km megtétele?
D: 20 perc
T: Akkor mennyivel kevesebb ideig jött le, mint fel?
D: 8
T: Miért pont 4 km-t mondtam?
D: Mert 16 perchez köze van a 8 percnek.
T: Akkor? Vajon mi lehet a megoldás?
D4: Ha 4 km 8 perces eltérés, akkor kétszeres eltéréshez 8 km hosszú lejtő kell!
T: Helyes, okos vagy Viola! Akkor még arra lennék kíváncsi, hogy mondhattam volna 2 km-t, vagy 6 km-t?
D4: 2-t igen, de 6-ot nem, mert az nincs meg a 20-ban.
T: No, akkor nézzük meg, hogy egyenlettel hogyan tudnánk megoldani, hogy ne kelljen tippelgetni, illetve, ha nem ilyen kézenfekvő számokkal dolgozunk, akkor is ki lehessen számolni. Aztán pedig egy nagyon érdekes harmadik fajta megoldási módot is megbeszélünk.

A t=s/v képletbe helyettesítettünk be, természetesen együtt dolgoztunk, én a táblára írtam, ők a füzetbe.Kiszámoltuk a lefelé és felfelé menet időtartamát órában és a 16 percet átírtuk 16/60 óra alakba. (Nem volt könnyű elérnem, hogy a percet órába ígyváltsák át és ne nekem kelljen megmondanom.) Majd az egyenletet felállítottuk, amely újabb problémát okozott. Mit miből vonunk ki, melyik oldalhoz kell hozzáadni, stb. Szükség volt arra, hogy mondatba öntsem: Pl.: A lefelé menet kevesebb időt vett igénybe, ezért ahhoz hozzáadva a 16 percet, azaz 16/60 órát, akkor pontosan a felfelé menet időtartamával lesz egyenlő.

Végül a legkézenfekvőbb logikai megoldásra is rávezettem őket kérdéseimmel:

T: Ha 60 perc alatt 20 km-t tesz meg, akkor mennyi idő alatt tesz meg 1 km-t?

D: 60:20, azaz 3 perc alatt.

T: Ha 60 perc alatt 12 km-t tesz meg, akkor mennyi idő kell 1 km megtételéhez?

D: 60:12, azaz 5 perc

T: Akkor, képzeljük el, hogy együtt indulnak 12 ill. 20 km/h sebességgel, egy irányba. Hány perccel előbb ér 1 km távolságra a gyorsabb?

D: 2 perccel előbb.

T: Akkor 2 km megtétele esetén hány perccel hamarabb ér oda a gyorsabbik?

D: 4 perccel.

T: Hányadik km-nél következik el az, hogy 16 perccel hamarabb ér oda?

T: A nyolcadiknál, mert kétszer annyi a perc, mint a km.

Ennek a feladatnak számomra nagy tanulsága van. Az az egy tanuló, aki megoldotta magától, ő arra a kérdésemre, hogy: *„Hogyan számoltad ki?”,* azt a választ adta, hogy *„Ez egyszerűen kijön, látszik a feladatból!”* Bővebben indokolni nem kívánta, de a füzetébe lejegyzett számokból (5; 3; 16 és a 8km) látható volt, hogy a harmadik megoldást választotta. Villámgyorsan, magabiztosan. Őt egy évig tanítottam, egy nyelvi előkészítős 9. osztályban, heti 2 órában. Előzőleg matematikából annyi kudarcélménye volt, hogy felmentést kapott, szakembertől, hivatalosan. Annyit tudok róla, hogy azóta is nagyon nehezen megy neki a matematika, rákérdeztem a következő tanáránál, aki mondta, hogy a gyerek nem dolgozik a matematika órán. Bele kell törődni, hogy mi, matematika tanárok, nem válthatjuk meg a világot, és igaz, hogy igyekeznünk kell minden gyerekre személyesen odafigyelni, de a körülmények és a mi saját adottságaink sem mindig teszik lehetővé. Ehhez kellene sok Ambrus Tanár Úr, aki nyugdíjasként lejárt vidékre, hogy egy tehetséges gyerekkel foglalkozzon. A magam részéről úgy gondolom, az én

volt tanítványomban is valamilyen tehetség volt, de hogy mi jut felszínre abból valaha? Nem tudom.

Meggyőződésem, hogy egy pedagógusnak sokat kell tapasztalnia pályája során. Sok éves, sőt több évtizedes tapasztalás kell ahhoz, hogy igazi pedagógussá váljék. A tanítás ténylegesen életpálya, az élet tanít meg rá, ha megfelelő hittel és kitartással bírunk. A hit és kitartás rövidtávon a tanítványok, és szüleik visszajelzéséből táplálkozhat, de az igazi megerősítés évek, sőt évtizedek múltán érkezik meg a volt tanítványoktól kapott tisztelet, szeretet és olykor váratlan megkeresés formájában. A későbbi visszajelzések mutatják meg igazán azt, hogy érdemes tanítani.

Mindezért érdemes néha megszenvedni kudarcokat és megvívni a harcainkat.

A nevelő feladata olyan választási szabadságot adni a gyereknek, hogy bárhogyan is választ, igazán matematikát tanuljon.
(Dienes Zoltán)

Gyakran választom a gyakorlásnak azt a formáját, amikor egy tanórára tudatosan több feladatot viszek be, mint amennyit 45 percen belül meg lehetne oldani. Van úgy, hogy csoportos vagy páros megoldásra adom közre, és a csoportokat vagy a párokat versenyeztetem egymással, hogy melyikük tudott több feladatot az órán helyesen megoldani. De van úgy is, hogy mindenki megkapja a feladatsort és egyénileg dolgozik. Mindegyik esetben az óra végén egyeztetem az eredményeket és kihirdetjük a győztest. Szeretek olyan helyzeteket teremteni, amikor nincs olyan tétje a munkának, hogy rossz osztályzat járhatna érte, de valamivel mégis inspirálni tudom a tanulókat.

A versenyhelyzet egyfajta izgalmi állapotot teremt, és tapasztalatból mondom, hogy sokkal eredményesebb ilyenkor a munka. Természetesen az ötösök sem maradnak el, szeretek jutalmazni. Amikor többen oldják meg a feladatsort, akkor egymás között felosztják a feladatokat, hogy minél többet el tudjanak elvégezni, és megfigyeltem, hogy ebben a helyzetben, ha közösségi cél van, min-

denki sokkal aktívabb ahhoz képest, mintha magára lenne hagyva. Ha személyenként kapják a feladatsort, akkor is lehetőséget adok arra, hogy válasszanak a feladatok közül.

Tehát választási lehetőség és verseny tét nélkül, eredményesség esetén megdicsőülés! Ezt nagyon szeretik a gyerekek, szárnyakat kapnak. Én pedig soha nem fukarkodom a dicsérettel és jutalomjeggyel. Szoros a tanmenet által biztosított időkeret, de mindig kerítek alkalmat erre a fajta foglalkozási típusra. Az aktuálisan tanult tananyag feladatait tartalmazó feladatsorba mindig belecsempészek kifejezetten a problémamegoldásra koncentráló feladatokat. A szokásos feladataimat az aktuális tudásszinthez és tananyaghoz igazítva gyakran átalakítom. Legjobban azokat a feladatokat szeretem, amelyek a matematikának több ágát is magukban foglalják és különböző transzformatív lépésekre késztetik a gondolkodást.

Ezek a feladattípusok abban hasonlítanak egymásra, hogy körültekintő gondolkodást igényelnek, de azon kívül viszonylag rövidek, frappánsak. Olykor becsapósak, mert hirtelen megválaszolhatóak, ha megtalálják hozzá a megfelelő reprezentációs módot, vagy a megfelelő megoldási irányt. Ekkor valójában könnyűek. De ha a tanulók nem találnak megfelelő megoldási eszközt, akkor is elgondolkodtatom őket. Az óra végén általában csak az eredmények egyeztetésére van lehetőség, de későbbiekben megtalálom a módját annak, hogy ne maradjon soha egyetlen probléma se megbeszélés nélkül. Pozitívuma még ennek a módszernek, hogy tapasztalataim alapján óra után maguk a tanulók is beszélnek egymás között az érdekesebb feladatokról, a táblára felrajzolják, számolnak, vitatkoznak, érvelnek, az én véleményemet is kikérik, hogy kinek van igaza. Sokszor már becsengetnek a következő órára, de mi még a tábla előtt egyeztetünk.

Van sok kedvenc feladatom, ezek közül szeretnék bemutatni itt egyet.

Feladat: *Egy vén tölgyfa henger alakú törzsének 4 méter a kerülete. Két csiga mászik fel rajta függőlegesen a fatörzs átellenes oldalain. Az egyik 47 cm-t tett meg, a másiknak viszont már csak 3 cm van hátra a 2 m magasságig. Ekkor a két csiga titkos csiganyelven megbeszélve elhatározza, hogy az eredeti úticélt feladva a lehető legrövidebb*

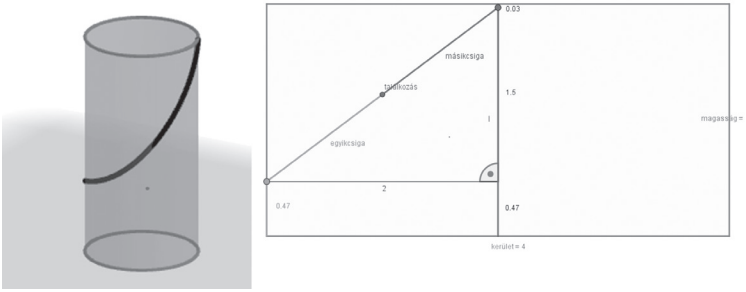
úton elindul egymás felé. Mekkora távolságot tesznek meg, ha egyenlő sebességgel mozognak?

Ez a feladat alkalmas geometriai szemlélet fejlesztésére már egészen kicsiknek is, ha kivágnak egy téglalapot, hajtogatnak belőle hengert, rárajzolják a csigák vélt útvonalát, és szembesülnek azzal, hogy a térbeli görbe a síkba kiterített felületen egyenes.

Numerikusan megoldható általános iskola 8. osztályától Pitagorasz tételével. Képi ábrázolással előnyös. A fenti adatokból a pitagoraszi számhármas is felismerhető, így fejszámolásra is alkalmas. Lehet bonyolítani a kérdésfeltevést, ha az adatokat másképp adjuk meg, például, ha a csigák különböző sebességűek, amit konkrétan is és sebességük arányával is megadhatunk, stb.

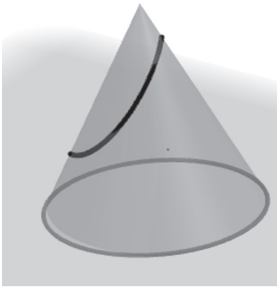
10. osztálytól variálhatjuk úgy az adatokat, hogy másodfokú egyenletre vezessen.

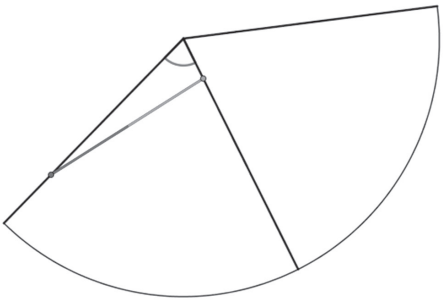
Ha egyik vagy másik csiga sebességének irányát pl. a vízszintes-hez képest adjuk meg, akkor a hegyesszög szögfüggvényei is szükségessé válnak.



Ha útvonalakat jelölünk be, elágazásokkal, kombinatorikai témában kérdéseket is feltehetünk: *„hányféle útvonalat választhat az egyik csiga, ha a másikhoz szeretne eljutni?"*

Változtathatunk úgy az adatokon, hogy henger helyett kúp formájú felületen mozogjanak a csigák. Az alapkör és a testmagasság maradhat ugyanakkora. Ilyenkor 11. osztályban a trigonometria témakörében tanult koszinusztétel alkalmazható, ha a kúp forgástengelyével párhuzamos síkmetszetből alkotót, majd a kiterített palástból középponti szöget számolunk.





Felületet, térfogatot is számoltathatunk. Ha bejut a csiga a fatörzs belsejébe, különböző síkmetszeteken keresztül tovább fejleszthető a térlátás, csak alkalmas kérdéseket kell feltenni.

Továbbá, ha valamelyik csiga úgy járja végig az útvonalat, hogy visszatér a kiindulási pontjába, a henger, ill. a kúp síkmetszeteiként rátalálhatunk két másodfokú görbére. Ha nem ugyanoda tér vissza, a másik két kúpszeletet is megkapjuk. Ha levágatjuk a gyakorlatban a testek tetejét, és lefordítva körberajzoltatjuk egy másik lapra, egy kisebb gyerek is megtapasztalhatja a kör és ellipszis közötti különbséget, rajzoltathatunk parabolát és hiperbolát. A fakultáción nagyobbak pedig még akár számolhatnak is, függvényeket is felvehetnek. Fantáziánk szab csak határt bármely feladatnál az alkalmazhatóság tekintetében. Különösen szeretem variálni a feladatokat, azt szoktam mondani, azért csinálom, hogy *„én se unatkozzak a saját óráimon”*, de valójában élvezem, ahogy csűröm-csavarom a tanítványaim gondolatait, és azt, ahogy ezáltal okosodnak – legalább is szerintem.

„Nekem ne mondják el, hogyan kell a tangót táncolni,
hanem állítsanak be oda, és mutassák meg,
és járják végig velem a tangót
először szabályosan, hogy miután nagyon tudom szabályosan,
úgy tudjak szárnyalni, mint egy angyal.
Ugye, tulajdonképpen ez az igazi tanítás.”
(Bagdy Emőke)

Középiskolai tanári gyakorlatom során mindkét tantárgyamból rendszeresen megtapasztalom, hogy a tanulók eredményessége az addigi tanulmányaik során megszerzett tudáson túlszorosan összefügg problémamegoldó képességük fejlettségével és a tantárgyakhoz való hozzáállásukkal. Erősen szembetűnő továbbá az is, hogy a szaktárgyi tudás, a problémamegoldó képesség és a tantárgyi attitűd hármasa kölcsönösen erősítik egymást. Középiskolában a tananyag mennyisége, minősége, valamint az érettségire való felkészítés felelőssége a pedagógustól teljes munkát kíván, megszabott keretek között, egyre szűkösebb időkeretben. Saját gyakorlatomban sok figyelmet fordítok az esetlegesen elmaradt tantárgyi tudásanyag pótlására, felelevenítésére. Tizenévig évig tanítottam óraadóként népfőiskolán nappali tagozaton és felnőttoktatásban, ahol hátrányos helyzetű, leszakadó társadalmi rétegekből érkező, hiányos matematikai tudással kezembe kerülő tanulókat kellett eljuttatnom az érettségiig. Ott rákényszerültem arra, hogy saját magam dolgozzak ki a gyakorlatban olyan fejlesztőmódszert, amellyel pótolhatom az elmaradt ismereteiket. Mindig kézzelfogható módon közelítettem meg a pótolandó hiányosságokat, például a törtek esetében tevőlegesen daraboltunk, stb. A széleskörű tapasztalataim során figyeltem fel arra, hogy adott általános iskolából, adott tanító kezéből kikerülő tanulók az átlagnál magasabb matematikai problémamegoldó képességgel és ezzel párhuzamosan, a matematika tantárgyhoz való hozzáállásukat illetően nagyobb kedvvel és önbizalommal is rendelkeznek. Velük mindegyik iskolatípusban könnyebb dolgom volt, míg, akiknél ezt nem tapasztaltam, ott nagyon a mélyére kellett ásnom a hiányok pótlásának folyamatában, és sokkal több nehézséget is okozott mindez. A felismerés indított el azon az úton, hogy a leendő tanítók matematikai problémamegoldó képességének javításán munkálkodjak. Ambrus Tanár Úr javaslatára saját tematikát dolgoztam ki számukra. A szemináriumi kurzustáltalános tanítóképzésben résztvevő és matematika műveltségterületen tanuló hallgatóknak tartom. Célom, hogy a hallgatók tudatos jártasságot szerezzenek a problémamegoldásban, valamint módszertanilag gazdagodjanak mind egyéni tudásuk, mind pedagógiai eszköztáruk tekintetében.

Tudományos eredmények és saját tapasztalataim is alátámasztják, hogy szoros összefüggés van a tanulók és a pedagógus matematikai attitűdje között, az attitűdök, motívumok alakításában kiemelt szerepe van a pedagógus személyiségének és a tanórán történteknek. Mindegyik csoportomnál felmérem a matematikai attitűdöt, és bár nem meglepő, hisz tanítani készülő hallgatókról van szó, mégis örömteli, mennyire pozitív a hozzáállásuk. Szeretnék kiemelni itt néhány eredményt.

Arra a két állításra, hogy *„A testvérem/szomszéd gyerek - aki általános iskolás – megkér, hogy segítsek megoldani a matek háziját.”*, illetve, hogy: *„Tanítani fogok kis gyerekeket számolni.”* mindenki azt a választ jelölte meg, hogy *„Kifejezetten örülök neki, jó érzést vált ki belőlem”*.

A válaszokat egy 1-től 5-ig húzódó skálán lehetett megadni. *(„Kifejezetten örülök neki, jó érzést vált ki belőlem” (1)<…<(5) „Kifejezetten zavar, nagyon rossz érzést vált ki belőlem”)* Ezen a skálán a „legrosszabb” érték a 2,6 és a 2,8 volt, a következő két állításra:

„A csoport által megoldott feladatokat nekem kell bemutatnom, és ez alapján kapjuk az értékelést.”

„Ha elvégzem a főiskolát és tanító leszek, lesz olyan tanítványom, akinek matematika tanárok a szülei.”

Nem tekinthetőek ijesztőnek ezek az értékek sem, viszont elgondolkodtató, hogy bár nagy kedve van a leendő tanítónak matematikát tanítani, de szakmailag kissé tart a felelősségtől és a megmérettetéstől.

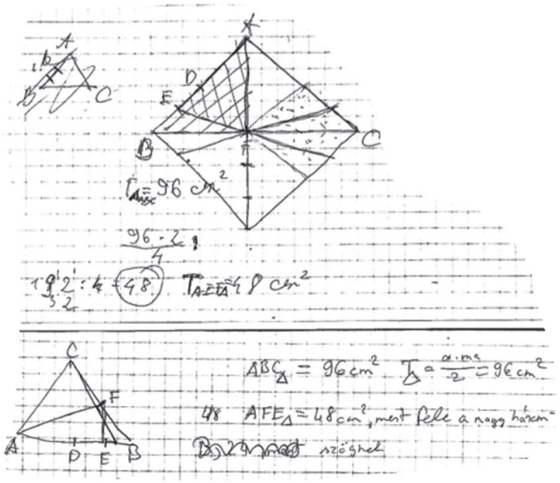
A foglalkozásokon igyekszem a lehető legtöbb matematikai problémamegoldó gondolkodást fejlesztő feladattal megismertetni a hallgatókat. A feladatok tartalmilag az általános iskola első 6 évének matematikai témaköreihez igazodnak. A spiralitás elvét szem előtt tartva minden szeminárium elején változatos feladatokat tartalmazó feladatsorokat adok eléjük, ezáltal aktuális tudásukat mérem fel, folyamatosan nyomon követem fejlődésüket. Állandó visszacsatolással mélyítem ismereteiket és megszerzett képességüket. Az aktuális feladatokkal minden egyes kurzus alkalmával rugalmasan alkalmazkodom a csoport fejlettségi szintjéhez és igényeihez. A felmerülő matematikai problémák és feladatok elsődleges forrá-

sa a saját pedagógusi munkám során felhalmozott gyűjteményem, amelyet folyamatosan bővítek általános iskolai és középiskolai tankönyvek, feladatgyűjtemények, matematikai versenyek, kompetencia felmérések feladatsoraiban talált feladatokkal és minden szóban, írott formában vagy digitálisan elérhető forrásból származó klasszikus logikai feladványokkal és a megcélzott kisiskolás korcsoport sajátosságainak megfelelően, játékokkal. Ezek közül a feladatok közül szeretnék egyet bemutatni, és a megoldást elemezni.

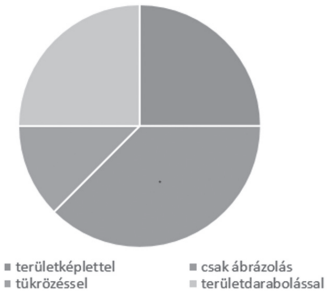
Feladat: *Az ABC háromszög AB oldalának felezőpontja D, a BD szakasz felezőpontja E, a BC oldal felezőpontja pedig F. Az ABC háromszög területe 96 cm². Hány cm² az AEF háromszög területe?*
A) 16 B) 24 C) 32 D) 36 E) 48
(A helyes megoldás a D) válasz.)

A feldolgozás módszere: Egy 10 tesztes feladatból álló feladatsort állítottam össze, azok közül egyik ez. A feladatsort 30 percre terveztem, de hallgatói kérésre 40 perces lett. Külön lapot is biztosítottam a hallgatók számára abból a célból, hogy próbálkozásaikat, és a megoldás menetét is oda írják le. 40 perc után az előzőtől különböző színű tollal még 15 percet dolgozhattak, amelyből a megoldáson való gondolkodásuk mélységére és sebességére kívántam következtetni. A megoldások összeszedése után közösen megbeszélés következett, feladatonként haladva. Lehetőséget adtam arra, hogy a hallgatók, egyénileg vállalva bemutassák a táblánál saját megoldásaikat, vitatkozzanak egymással, próbálják meggyőzni egymást saját igazukról, és elvártam, hogy a végén konszenzusra jussanak. Magam a különböző megoldási módszerekre hívtam fel a figyelmet, inspiráltam őket a „legokosabb" megoldás kiválasztására, az indoklás megfogalmazására, és mint mindig, feltettem a kérdéseimet arra vonatkozóan, hogy esetlegesen *„Hol rontotta el?"*, illetve *„Hogyan tanítaná ezt az iskolában?"*; *„Mi a véleménye?"*. Ezt a feladatot jelen írásomban egyrészt azért választottam bemutatásra, mert tesztes típusa ellenére sem született egyetlen jó megoldás sem, másrészt azért, mert ez egy tipikusan alkalmas lehetőség arra, hogy a hallgatók síkgeometriában való jártasságát a további fejlesz-

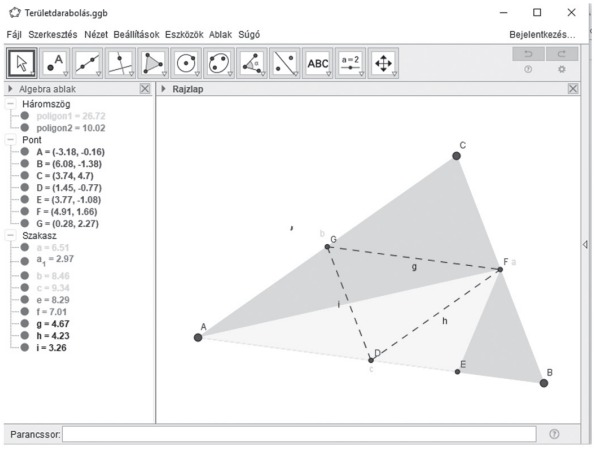
tés érdekében megfigyeljük. Az egyéni munkára rendelkezésre álló idő alatt mindenki készített ábrát és az aránytalanságoktól eltekintve minden pontot és területdarabot helyesen ábrázoltak. Ennek ellenére nem jutottak el a helyes megoldáshoz. A következő ábrán két hallgató rajza és számolása látható. Az első esetben a háromszöget egyik oldalára való tükrözés után, mintegy megkétszerezve, a területet is kétszerezi, aztán, minden átmenet nélkül negyedeli abban a tévhitben, hogy a kérdésben szereplő terület így a kétszeresnek a negyede, vagyis az eredeti háromszög területének a fele lesz. A másik bemutatott téves megoldásban szintén minden bizonyítás, belátás nélkül adja meg az eredeti háromszög területének felét megoldásként.



A megoldási próbálkozásokban leggyakrabban, 37,5%-ban kizárólag az ábrázolásig, vagyis az adatok feldolgozásáig jutottak. Az előzetes tanulmányok során elsajátított területképlettel, azaz számolással próbálkozott sikertelenül 25%, illetve tükrözési transzformációval, szintén sikertelenül 12,5%. A területdarabolásos módszert, amely a legegyszerűbben vezet a megoldáshoz, 25% ismerte fel lehetséges módszerként, de ezek a próbálkozások sem jártak sikerrel. A megoldások arányát a következő kördiagram látványosan érzékelteti.



Természetesen az elemzéssel nem az a célom, hogy a hallgatók matematikai hiányosságaiban kutakodjak, csupán lehetőség szerint segítséget kívánok nyújtani abban, hogy feladatmegoldó módszereik tára gazdagodjon. Ugyanakkor leendő tanítókról lévén szó, nem szabad elmenni ilyen feltűnő sikertelenség mellett, így a továbbiakban hangsúly fektettem a tapasztalati úton való megoldásokra, és a későbbi foglalkozásokra olyan feladatokat is kerestem, amelyekhez manuális tevékenységre volt lehetőség: hajtogattunk, kivágtunk, összeraktunk, daraboltunk, egymással lefedtünk geometriai alakzatokat. Ennél a feladatnál kiváló lehetőséget ad a GeoGebra segítségével való szerkesztés is. Túl azon, hogy precíz ábrát készíthetünk a segítségével és a területszínezés lehetőséget ad a kiemelésre, az algebra ablakban még a kívánt poligonok területének értékét is leolvashatjuk.



Az elkészített ábrával ne az legyen a célunk, hogy az ABC háromszög területe pontosan megfeleljen a feladatban adott értéknek, csupán a sejtés céljából egy esetlegesen megszerkesztett háromszög területét olvassuk le és viszonyítsuk a kérdéses területhez. A szoftver dinamikussága miatt több méretben lehetővé válhat a területek összehasonlítása, amennyiben mozgatjuk a háromszög csúcsait. A középvonalak segédvonalként való berajzolása és a szemléletesség nagyban hozzásegítette a hallgatókat ahhoz, hogy a területek arányaira ráérezzenek. A többféle méretben kapott területértékek arányát is kiszámoltathatjuk a programmal, így a megoldást sejtés szintjén a képernyőn is prezentálhatjuk. A ggb file könnyedén elkészíthető, a kurzusokon a GeoGebra használatát is tanítom. Nyomtatásban csak a képernyőképeket tudom megmutatni.

Mivel a gyermekek még nem képletekben gondolkodnak, ezért ezzel a feladattal a hallgatók körében fejlesztési célom a képi reprezentáció alkalmazásának szorgalmazása és a geometriai alakzatok tulajdonságainak, jelen esetben a háromszög nevezetes vonalainak és területének tapasztalati megismerése által a területdarabolásban rejlő különböző módszerek alkalmazása.

Úgy érzem, és a hallgatók visszajelzéseiből is megerősítést nyert, hogy kurzusaim segítették szakmai biztonságérzetüket, a feladatok feldolgozásának változatossága pedig gazdagította módszertani kultúrájukat.

„Ő azt hiszi, hogy én most nem tudom, hogy ő most vidáman rám bízta a egész dolgot – ő nem tudja, ő persze nem emlékszik ugyanerre a jelenetre, húszegynéhány évvel ezelőtt, mikor én húzódtam így félre, boldogan és megkönnyebbülve, és az apám ült le így mellém, ugyanezzel a bosszankodó és fontoskodó arccal, mint most én. És ami a legborzasztóbb még hozzá – ebben a pillanatban villan át rajtam – erről ugyanerről a példáról volt szó akkor is! … Úgy van, nincs kétség! … a bükkfa és a kályha! szent Isten! … pedig akkor már majdnem megértettem – csak elfelejtettem! … Az egész húszegynéhányéves korunk egy pillanat alatt semmibe süllyed. Hogy is volt csak?”

(Karinthy Frigyes)

Levelező tagozatos tanítóképzős hallgatóknak is tartottam matematikai problémamegoldó gondolkodást fejlesztő kurzust. A tagozat sajátosságainak megfelelően a szemeszter során az összes szemináriumi óra kétszer egy-egy fél napra lett besűrítve. Egy egész délelőtt során csak matematikával foglalkoztunk, és ahhoz, hogy az érdeklődésüket és a figyelmüket fenn tudjam tartani, biztosítanom kellett a foglalkozások során a változatosságot.

Egyik alkalommal kiosztottam egy feladatsort, mindenki kapott 25 percet az önálló megoldásra, amit az álatalam kiosztott, majd a foglalkozás legvégén begyűjtött lapra megoldott. Ezután a hallgatókat csoportokra bontottam, és arra kértem őket, hogy a csoport tagjai vitassák meg az egyéni megoldásokat, győzzék meg egymást, próbáljanak a csoporton belül konszenzusra jutni, és az így elfogadott „csoport-megoldást" rögzítsék. Amikor mindegyik csoport végzett, egyeztettük a végeredményeket, amit felírtam a táblára. Feladatról feladatra haladtunk, én nem foglaltam állást, megkértem a csoportok képviselőit, hogy a táblánál adják elő megoldásaikat.Vitát gerjesztettem kérdéseimmel a csoportok között, érvelésre késztettem őket. Abban az esetben, amikor egy feladat esetében a csoportok megoldása megegyezett, megbeszéltük az egyéni megoldási módokat.

Célom az volt ezzel, hogy ne csupán a végeredmény számítson, hanem, mint leendő pedagógusok, ismerjenek meg többféle megoldási módot, legyenek képesek kifejezni magukat, kerüljenek olyan helyzetbe, hogy részletesen meg kelljen indokolniuk gondolkodásukat, érvelniük kelljen lépésről lépésre, mintegy gyakorolva a leendő tanítói viselkedésüket. Továbbá legyenek képesek figyelni a másként gondolkodóra, gyakorolják a másik gondolatainak követését, hiszen majdani tevékenységükben is arra lesz szükség, hogy a gyermekek gondolatait figyeljék és vezessék. Minden egyes feladat kapcsán kikértem a véleményüket arról, hogy miért lehet hasznos az adott feladat, mint probléma felvetése. A szemináriumon elhangzottakat hangfelvevővel rögzítettem, ebből szeretném itt az egyik feladat megoldása során tapasztaltakat megosztani.

Feladat: *Másfél macska másfél nap alatt másfél egeret eszik. Hány egeret eszik 15 macska 15 nap alatt?*

A feladat nagy vitát váltott ki a hallgatók között. Nem magam találtam ki ezt a feladatot, egy feladatgyűjteményből vettem már régebben. Gyakran megoldatom a tanítványaimmal középiskolában is, jól el lehet szórakozni, míg folyamatosan mondjuk, hogy *„ha másfél macska másfél nap alatt másfél egeret eszik, akkor 15 macska…."* (Olykor még én magam is belebonyolódom.)

Itt, a felnőtteknél találkoztam először a feladat kritikájával. Így szólt az egyik hallgató, amikor elolvasta a feladatot: *„Milyen hülyeség, nincs is másfél macska, szegény gyerekek, milyen értelmetlen feladatokat kapnak!"* Aztán felemlegettem Karinthyt: *„Ha kilenc kályhában öt és fél nap alatt tizenkét köbméter bükkfa ég el …"*, de sajnos nem ismerték. Sebaj, még szerencse, hogy egy újszülöttnek minden vicc új. A feladat feldolgozása kapcsán zajló beszélgetés így szólt:

Tanár: Mi a csoportok válasza a 3. feladatra?

Csoport1: 15 vagy 150, nem tudtuk eldönteni.

Cs2: 15

Cs3: 150

Cs4: 15 vagy 225, nem tudtuk egymást meggyőzni.

T: Mivel a 15-ös megoldás háromszor került szóba, és még csoporton belül sem tudták eldönteni, kérem szépen, aki a 15 mellett áll ki, indokolja meg a többieknek, és aztán kérem, jelentkezzen, ha valaki meg kívánja cáfolni.

Hallgató1: Mert 10-szeres szorzó van. Ha másfél macska másfél nap alatt másfél egeret eszik, akkor 15 macska 15 nap alatt 15-öt.

T: Jelentkezzen, aki emellett teszi le a voksát!...(valaki jelentkezik) Mondja!

H2: Azért teszem le emellett a voksomat, mert az evéssel eltöltött idő a fogyasztott egerek számával egyenes arányosan kell, hogy nőjön, mert rászánja azt az időt az evésre. Az evés tehát maga után vonja az időtényezőt. (Nevetés) Ha én 1 pizzát 1 óra alatt eszek meg, akkor, ha 2 pizzát eszek meg, akkor tuti kell hozzá 2 óra! Nem kell kevesebb, tehát 15 egér 15 nap alatt 15 egeret eszik meg.

T: Jó, akkor mondhatjuk, hogy macska helyett vagyok én, egér helyett van a pizza. Mondhatjuk?

H: Igen.

H3: De itt 15 macskáról van szó!

H2: Az idővonzat akkor is 10-szerest ad!
T: Ki az, akinek van érve a 15 ellen?
Hallgatók mind: A 15, az jó.
T: Mindenki egyetért?
H.mind: Igen. (Szerintem belefáradtak a gondolkodásba, inkább az is elfogadja ezt a választ, aki eredetileg nem így gondolta.)
T: Akkor én jelentkezem, hogy nem 15.
H4 (felélénkül): Mert itt kétszeres egyenes arányosság van, és akkor több, mint 15!
T: A gyereknek is így mondaná, hogy kétszeres egyenes arányosság, és számold ki?
H4: Jó, akkor 15 macska …..

Aztán eredmény is megszületett.

Megbeszéltük, hogy a gyereknek nem a szakkifejezéseketés a szabályokat kell betanítani, hanem életszerű példákra van szüksége. Továbbá rávezettem őket arra, hogy milyen komoly koncentrálást igényel a tanári munka, mert egyszerre kell több gyerekre figyelni,mindegyikük gondolatait követni, közben folyamatosan lereagálni, egy egész tanórán keresztül talpon kell lenni, és közben soha nem lankadhat a figyelmünk.A fenti feladat megoldásábanintenzív vita után, jó hangulatban konszenzusra jutottunk.

Irrealitása ellenére örülök ennek a macska-egér szójátéknak, mert tényleg képes megtornáztatni az agyat, szóbeliséget kíván, és ahányszor feladom, mindig jókedv és nevetés lesz belőle. Aztán a végére mindig megoldjuk, és mindenki megérti. Legalább is annyira bizonyára, mint amikor Karinthy tanította a kisfiát.

„Bármilyen probléma megoldása valamilyen nehéz helyzetből kivezető út megtalálását, valamilyen akadály megkerülését jelenti, olyan cél elérését, amelyhez egyébként közvetlenül nem tudtunk volna eljutni.
A probléma megoldása az értelem jellegzetes teljesítménye, és az értelem az emberiség jellegzetes képessége, tulajdonképpen a problémamegoldás a legjellemzőbben emberi tevékenység."
(Pólya György)

Több célnak szerettem volna eleget tenni. Egyrészt figyelemmel voltam arra, hogy emlékkönyvbe írok - tanítványként, pedagógusként. Úgy éreztem, a tanítás, a tanár-lét kiemelendő. A matematikától sem szerettem volna eltekinteni, így gyakorlati tapasztalataimat osztottam meg. A matematikai didaktika témakörében való kutatásaim néhány részletét is beemeltem írásomba.

Szeretném ugyanakkor megjegyezni, hogy a tanulók hiányosságainak elemzése kapcsán nem a hibák kiemelése volt a célom, inkább a hiányosságokra és az alkalmazás nehézségeire való rávilágítás. Nagy felelősség van a pedagógusokon, de mindenkinek tisztában kell lennie azzal, hogy mind a külső, mind a belső feltételek egyre előnytelenebbek, nem szolgálják megnyugtató módon a tanulók megfelelő felkészítését. A pedagógusoknak megemelkedett a kötelező óraszáma az utóbbi években, több dolguk van, több tanítványra kell figyelniük, így a rég múlt korok tanáraihoz képest sokkal leterheltebbek. Viszont még ennél is nagyobb baj az, hogy a tanulók egyre kevesebb óraszámban tanulják a matematikát.

Nincs elég idő iskolai keretek között a gyakorlásra, a beépülésre, hiszen az általános iskola 8 évfolyamán 207 tanórával, a gimnáziumban 4 év alatt 94 tanórával van kevesebb ma, mint 40 évvel ezelőtt.Ez azt jelenti, hogy ma egy átlagos diák az érettségiig az iskolában összesen 301 tanórával kevesebb matematikát tanul, mint a mi időnkben. (adatok: Laczkovics Miklós, MTA)

Véleményem szerint nem szabad eltekinteni ezektől a tényektől akkor, amikor a mai gyerekek matematikai felkészültségét és kompetenciáit értékeljük, és nem szabad elfelejteni ezeket a hátrányos feltételeket akkor sem, amikor a különböző mérési eredmények elemzése kapcsán felelősöket keresünk. Személyi felelősség keresése helyett a megfelelő feltételek megteremtése kellene legyen a közös cél. Megragadva az alkalmat, kérem Ambrus András Tanár Urat, legyen a matematika tanítás helyzete jobbításának a Nagykövete annak érdekében, hogy vissza tudjunk térni a világyszerte híres magyar matematika-oktatás színvonalához, és vissza tudjuk szerezni a pedagógus szakma becsületét, mert ez a szakmán túl az egész magyar társadalom érdeke.

Végül pedig köszönetemet szeretném kifejezni Ambrus András Tanár Úrnak, hogy tanított matematikára, tanított matematikát tanítani, példát mutatott arra, hogyan kell és hogyan érdemes a gyerekkel bánni, koordinálni a tudáshoz vezető utak útvesztőjében, hogyan kell és lehet a gyerekben meglátni az embert, és, hogy mennyire nagy szükség van arra, hogy odafigyeljünk a gyermekek gondolkodására. Hogy megmutatta, hogyan kell csinálni azt, hogy ne „csak" matematikát tanítsunk, hanem embert is egyben. Köszönöm Tanár Úrnak, hogy lehetőséget adott ebben a kötetben való megjelenésemre és, hogy lehetővé tette a több évtizedes pedagógusi munkám alatt felgyülemlett tapasztalataim megosztását.

Boldog születésnapot kívánok, kedves András, Isten éltessen még nagyon sokáig! Viszont látásra a 80, 85, 90, 95 és 100 éves jubileumi emlékkönyvedben!

Nagy Ildikó, egy volt és
jelenlegi tanítvány

Ötletek a geometria tantásához

Olosz Ferenc

Kölcsey Ferenc Főgimnázium – Szatmárnémeti

Először Sepsiszentgyörgyön a Bolyai Nyári Akadémián találkoztunk 2003 júliusában. A közel egy hetes rendezvény során meghallgattuk egymás előadásait és szakmai kérdések megbeszélésén túl személyes dolgokról is szót ejtettünk. Innen indult a kölcsönös tiszteleten alapuló barátságunk.

Ezt követően még négy olyan többnapos rendezvényen találkoztunk, ahol lehetőségünk volt egymás előadásaira elmenni és bővebben tudtunk beszélgetni. Ezek a találkozások a tanári pályám azon időszakára estek, amikor már kialakult a tanítási stílusom és sok mindenről személyes véleményem volt, de nem tudtam, hogy elképzeléseim mennyire helytállóak, időszerűek-e. Kérdéseimmel nem igen volt kihez forduljak, mert azokban az években a hazai egyetemeken a matematikadidaktikát olyan (egyébként kiváló) tanárok tanították, akik nem erre szakosodtak, ők is tanulóéveiket járták. Így nagyon jókor találkoztam Ambrus Andrással, mert elsősorban az ő előadásaiból és írásaiból kaptam hiteles tájékoztatást a Magyarországon és a más országokban folyó didaktikai, pszichológiai, pedagógiai kutatásokról. Ő erősített meg abban, hogy szakmai próbálkozásaim jó úton haladnak. Jólesett, hogy érdeklődött a munkám iránt, hogy biztatott, bátorított s ez újabb lendületet adott a további munkámhoz. A „Bevezetés a matematikadidaktikába" jegyzete (amit 2003 októberében tőle kaptam) és több cikke is segítségemre volt a matematika egyes fejezeteinek a tanításában, a didaktikai ismereteim bővítésében és főként annak rendszerezésében.

Tartalmi értékein túl, mindig megcsodáltam az előadásainak és rövid módszertani írásainak a szerkezeti felépítését. A témafelvezetései szellemesek (az érdeklődést könnyed, gyak-

ran humoros formában kelti fel); helyet talál matematikusok és matematikadidaktikusok véleményének; feltárja a dolgok elméleti hátterét; igazáról egyszerű, remek feladatokkal győz meg és zárásként olyan didaktikai megjegyzéseket tesz, amelyeket a gyakorló tanárok jól hasznosíthatnak. Írásai, előadásai számomra azért hasznosak, mert azok valós problémákkal foglalkoznak, mindig tanulok belőlük és továbbgondolásra késztetnek.

A matematika tanításával kapcsolatos észrevételek

Kiskoromtól szerettem a matematikát, általános- és középiskolában kitűnő matematikatanáraim voltak, édesapám és egyik nagyapám köztiszteletnek örvendő tanítók voltak, így ilyen példaképek mellett természetes volt, hogy matematikatanár akartam lenni. E döntésemet soha nem bántam meg, mindvégig imádtam tanítani, minden energiám a tanítás és a nevelés szolgálatába állítottam. Mindvégig középiskolában tanítottam (44,5 évet) az osztályaim színvonalától függően többször is változtattam a módszereimen, de a tanítással kapcsolatos elveim nem sokat változtak.

Megemlítek pár olyan dolgot, amelyet a munkám során fontosnak tartottam.

– A gondolkodás és a problémamegoldó képesség fejlesztése volt a főcélom. Ennek elérése érdekében fontosnak tartottam, hogy minél több érzékszervet kapcsoljak be a megértés és a megjegyzés folyamatába.

– Matematikát csak higgadt, nyugodt, fegyelmezett légkörben lehet tanítani. Az osztályban olyan hangulatot teremtettem, amelyben a tanulók mertek és akartak kérdezni. Vigyáztam arra, hogy az óráimon legyenek lazítási lehetőségek, de az összpontosítást, odafigyelést igénylő részeknél mindenkitől komoly, érett viselkedést vártam el.

– Tanulóimat önállóságra neveltem. Tudásszintűknek megfelelő feladatok kiadásával szoktattam rá az önálló munkára, majd ezt követően próbáltam felzárkóztatni őket.

– Sok olyan osztályom volt, ahol a többség átlagos vagy annál gyengébb tanuló volt, így természetes volt, hogy a „90%” igényeit

részesítettem előnyben, őket próbáltam meg felemelni. Az átlagon felüli diákok fejlődését differenciált foglalkozásokkal biztosítottam. A tehetséggondozást az órai differenciálással és az órákon kívüli tevékenységekkel oldottam meg.

Egy félbeszakadt kísérletről

Sokat töprengtem, hogy miről írjak ebbe az emlékkötetbe. Egy konkrét kérdés tanításáról azért nem akartam írni, mert az erdélyi és a magyarországi tantervek és elvárások sokban különböznek egymástól. Kísérlet bemutatása azért nem jöhetett szóba, mert a közelmúltban ilyet nem végeztem (már több éve nyugdíjas vagyok). Ezért döntöttem úgy, hogy egy kevésbé szokványos témát mutatok be, mégpedig a geometriai bizonyítási feladatok egy típusának a megoldási módszerek szerinti rendszerezését. Ezt a rendszerezési módot 25 évvel ezelőtt próbáltam ki, amikor az foglalkoztatott, hogy miként tudnám a tanulóimat a geometriafeladatok megoldásánál is önálló munkára szoktatni. A matematika más részeinél az akkori osztályaim elég jól dolgoztak, de a klasszikus síkgeometriai bizonyítási feladatoknál a többség csak véletlenszerűen próbálkozott. Hiába ismerték a megoldáshoz szükséges tételeket, tulajdonságokat, összefüggéseket, a tanulók többsége útmutatás nélkül képtelen volt dolgozni. Abban az időben a középiskolában még komolyan foglalkoztunk a geometriával, az egyetemi felvételiken is igényes geometriafeladatok szerepeltek, így változtatnom kellett a módszereimen. A geometriát már addig is úgy tanítottam, hogy minden tételnél, tulajdonságnál a tanulókkal megbeszéltem, hogy az illető állítás minek a bizonyítására vagy kiszámítására alkalmas és feladatok megoldásával szemléltettem, hogy a gyakorlatban azt miként alkalmazzuk. A mulasztást ott követtem el, hogy nem kértem számon ezen eljárások megjegyzését úgy, hogy bizonyítási célok szerint is tudják azokat felidézni. Szükségessé vált, hogy minden feladat megoldása előtt elméletileg is felelevenítsük a feladatban szereplő kérdés bizonyítására (kiszámítására) alkalmas „módszereket", hogy azok többszöri ismétlésével a tanulók jegyezzék meg ezeket az kiindulási lehetőségeket. Ha a tanulók elméletileg tudják, hogy milyen megoldási lehetőségek léteznek, akkor

a feladat adatainak ismeretében valószínűsíteni tudják az esélyesebb megoldásmódokat, sajátmagúknak diktálhatják, hogy mivel próbálkozzanak.

Fokozatosan mindenkitől elvártam, hogy egy-egy tulajdonság bizonyítására minél több „módszert" ismerjen (például két egyenes párhuzamosságának bizonyítására mely ismeretek, módszerek jönnek számításba) és ismerje a felhasználásra váró tételeket, kijelentéseket. Ha valaki ráérzett a jó útra, de közben elakadt , azt már könnyű volt kisegíteni. A gyengék ha elakadtak, megkérdeztem, hogy mivel próbálkoztak és vagy visszairányítottam egy már kipróbált ötlethez, vagy újabb lehetőségek kipróbálására ösztönöztem. A könnyebb feladatoknál ők is előbb-utóbb megtalálták a megoldás ötletét. A jóktól (ha lehetséges volt) többféle megoldást is elvártam. Bizonyos időközönként olyan feladatmegoldó órákat tartottam, amelyeken a feladatok csak egyetlen tulajdonság (például két egyenes merőlegessége) bizonyítását kérték, hogy minél több ismeret felhasználásával, minél több módszert felfrissíthessünk.

Sajnos ez a kísérletem nagyon hamar megszakadt, mert a szintetikus geometria tanítását teljes egészében áthelyezték az általános iskolába és ott főleg a számítási feladatokra tevődött a hangsúly.

Itt említem meg a rajzokkal kapcsolatos hasznosnak bizonyuló szokásomat. Mindig úgy készítem el a feladatokhoz szükséges ábrát, hogy a kezdő alakzatot a legvastagabb vonallal rajzolom és ahogy haladok a szerkesztéssel, úgy egyre vékonyabb vonalakat használok, majd áttérek a szaggatott vonalakra és ott is az egyre vékonyabb vonalak felé tartok. Így könnyen látom a rajz keletkezésének fázisait (látom az „ősöket" és a „leszármazások" sorrendjét) és tudom, hogy a vékony szaggatott vonallal rajzolt segédszerkesztések nem is biztos, hogy szükségesek. A feladatok többsége vagy az „ősökre" ad információt és a „leszármazottakra" vonatkozóan kér valamit, vagy pont fordítva, de a lényeg, hogy a vonalvastagság segít az egyik, vagy másik irányba való haladással.

Előre bocsátom, hogy nem vagyok megszokva a magyarországi terminológiával, jelölési és szövegezési szokásokkal, így az előforduló botladozásaim miatt elnézést kérek (mi a francia szokásrendet követjük, amely sokban eltér a Magyarországon használttól).

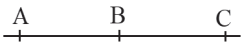
Pontok kollinearitásának bizonyítása

Három, vagy több egymástól különböző pont egy egyenesre illeszkedésének bizonyítási lehetőségeit mutatom be egyszerű feladatok segítségével. A feladatok csupán csak a módszerek jobb megértését szolgálják, tehát a módszerekhez kerestem feladatot és nem fordítva, mint ahogy az szokás. Ahol lehetett tudatosan kerültem a nehéz, vagy a hosszú feladatokat, hogy semmi se vonja el a figyelmet magáról a módszerről. Sok feladat több módszerrel is megoldható, így bárki megkeresheti a legegyszerűbb, vagy a legszebb bizonyítást. Mivel ez nem feladatgyűjtemény, ezért a feladatok nincsenek sem fejezetenként sem nehézségi szint szerint rendezve.

Ezeket a feladatokat fel lehet használni mintafeladatnak az egyes tételek, tulajdonságok tanításánál, vagy azokon az összefoglaló órákon, ahol a kollinearitás bizonyítását gyakoroltatjuk. Annál jobb eredményt érünk el, minél több alkalommal sikerül változatos feladatokkal gyakoroltassunk.

I. Kollinearitás bizonyítása szögek összegével

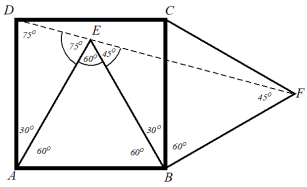
Ha $ABC\sphericalangle = 180°$, akkor *A, B, C* kollineáris pontok.



A gyakorlatban az *ABC* szöget két vagy több szög összegére bontjuk (vagy van bontva) és kiszámítjuk mindegyik szög mértékét, majd meggyőződünk, hogy ezek összege 180°.

Feladat:

Az *ABCD* négyzet oldalaira megszerkesztjük az *ABE* és *BCF* szabályos háromszögeket (*E* a négyzet belsejében, *F* pedig a négyzeten kívül van).



Bizonyítsa be, hogy *D, E, F* kollineáris pontok.

Megoldás:

DAE és *EBF* egyenlő szárú háromszögekben az *A, B* szög *30°* illetve 90°, így az alapon fekvő szögek 75° illetve 45° és $DEF\sphericalangle = DAE\sphericalangle + AEB\sphericalangle + BEF\sphericalangle = 75° + 60° + 45° = 180°$. Tehát *D, E, F* kollineáris pontok.

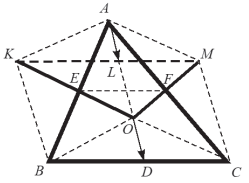
II. Kollinearitás bizonyítása távolságok összegével

Ha $AB + BC = AC$ akkor A, B, C kollineáris pontok.

Feladat:

Az ABC hegyesszögű háromszög köré írt kör O középpontjának az AB, AC oldalak szerinti tükörképe K illetve M. Legyen D az AO és BC egyenesek metszéspontja és L a sík azon pontja, amelyre $\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{OD}$. Bizonyítsa be, hogy K, L, M kollineáris pontok.

Megoldás:



Legyen E, F az OK, OM metszéspontja AB, AC-vel. A háromszög köré írt kör középpontja a háromszög oldalai felezőmerőlegeseinek a metszéspontja, ezért E, F az AB, AC felezőpontja, a tükrözésből adódóan az OK, OM felezőpontja is.

EF a KOM és ABC háromszög középvonala is, tehát $KM = 2 \cdot EF = BC$.

$AOBK$ és $AOCM$ rombusz (az átlók felezik egymást és merőlegesek egymásra) ezért $KA = BO$, $AM = OC$, $KAL = BOD$, $LAM = DOC$ (megfelelő szögek), és $AL = OD$ (a vektorok egyenlőségéből), tehát $KAL\sphericalangle = BOD\sphericalangle$, $LAM\sphericalangle = DOC\sphericalangle$, ahonnan $KL = BD$ és $LM = DC$.

$KL + LM = BD + DC = BC = KM$, tehát K, L, M kollineáris pontok.

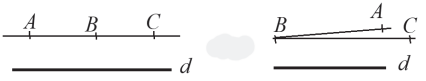
III. Kollinearitás bizonyítása egyértelműséget (unicitást) kimondó axiómákkal, tételekkel.

A sok lehetőség közül leggyakrabban a következő hat állítás valamelyikével bizonyítunk.

III. 1. Kollinearitás bizonyítása a párhuzamossági axiómával

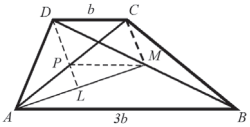
A párhuzamossági axióma: Egy egyeneshez egy külső ponton át egyetlen párhuzamos húzható.

Következőképpen dolgozunk: megállapítjuk, hogy $B \notin d$ és bizonyítjuk, hogy $AB \parallel d$ és $BC \parallel d$, akkor A, B, C kollineáris pontok.



Feladat:

Az *ABCD* trapéz alapjai *AB* = *3b*, *CD* = *b*, a *BD* átló felezőpontja *M*, az *AC* átló felezőpontja *P* és az *AM* szakasz felezőpontja pedig *L*.



Bizonyítsa be, hogy *D, P, L* kollineáris pontok.

Megoldás:

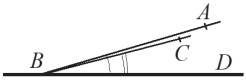
PL az *ACM* háromszög középvonala, így *PL* ∥ *CM*.

A trapéz átlóinak felezőpontja illeszkedik a trapéz középvonalára, ezért *PL CM* és mivel a trapéz középvonalának az átlók közé eső része $PM = \frac{AB - CD}{2} = \frac{3b - b}{2} = b = CD$, következik *PMCD* paralelogramma, tehát *DP* ∥ *CM*. Mivel *DP* ∥ *CM* és *PL* ∥ *CM*, így a párhuzamossági axiómából következik *D, P, L* kollineáris pontok.

III. 2. Kollinearitás bizonyítása a szögszerkesztési axiómával

A szögszerkesztési axióma: Az *OA* egyenes által határolt egyik félsíkban bármely $\alpha \in (0°, 180°)$ szám esetén egyetlen olyan (*OB* félegyenes létezik, amelyre $AOB\sphericalangle = \alpha$.

A következőképpen dolgozunk: Megállapítjuk, hogy az *A* és *C* pontok ugyanabban a *BD* egyenes által meghatározott félsíkban találhatók ($A \neq C$), bizonyítjuk, hogy $ABD\sphericalangle = CBD\sphericalangle$ és innen következik, hogy *A, B, C* kollineáris pontok.

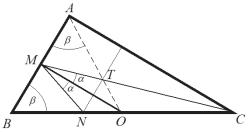


Feladat:

Az *ABC* derékszögű háromszög *AB* befogójának felezőmerőlegese a *BC* átfogót *O*-ban metszi. Legyen *N* a *BC* egyenes azon pontja, amelyre $CMO\sphericalangle = NMO\sphericalangle$. Az *N*-ből az *AC*-re húzott merőleges *CM*-et *T*-ben metszi. Bizonyítsa be, hogy *A, T, O* kollineáris pontok.

Megoldás:

MO az *AB* felezőmerőlegese, ezért *AO* = *BO*, következik $BAO\sphericalangle = ABO\sphericalangle = \beta$.



MO ⊥ *AB*, *AB* ⊥ *AC*, AC ⊥ *NT* következik MO ⊥ *NT*, vagyis az *MNT* háromszög *MO* szögfelezője ($CMO\sphericalangle = OMN\sphericalangle = \alpha$) merőleges az *NT* oldalra,

tehát *MNT* egyenlő szárú háromszög, *MN* = *MT*. Az *MBN* és *MAT* háromszögek egybevágók (mert *MB* = *MA*, *MN* = *MT* és $BMN\sphericalangle = AMT\sphericalangle = 90° - \alpha$) következik $MNB\sphericalangle = MAT\sphericalangle = \beta$.

Az *AB* egyeneshez viszonyítva a *T* ≠ *O* pontok ugyanabban a félsíkban helyezkednek el és $TAB\sphericalangle = OAB\sphericalangle = \beta$, tehát *A, T, O* kollineáris pontok.

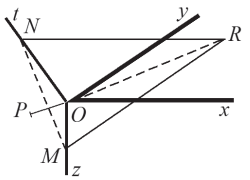
Megjegyzés: A I. feladata is megoldható ezzel a módszerrel, mert *E* ≠ *F* a *DC* ugyanazon az oldalán helyezkedik el és $EDC\sphericalangle = FDC\sphericalangle = 15°$, tehát *D, E, F* kollineáris pontok.

III. 3. Kollinearitás bizonyítása merőlegességgel.

Felhasználjuk a következő tulajdonságok egyikét: Egy egyenes egy pontjába egyetlen merőleges állítható. Egy egyenesen kívül eső pontból az egyenesre egyetlen merőleges húzható.

Feladat:

Az [*Oz* és [*Ot* félegyenesek az *Ox*-re nézve ellentétes félsíkban találhatók és az *xOy* hegyesszög száraira merőlegesek (Oz ⊥ *Ox*, *Ot* ⊥ *Oy*). Az *M* ∈ [*Oz N* ∈ [*Ot* pontokon át az *Oy* illetve *Ox* egyenesekkel húzott párhuzamosok metszéspontja, *R* és legyen *P* az *O* tükörképe az *MN*-re nézve. Igazolja, hogy *P, O, R* kollineáris pontok.



Megoldás:

MO ⊥ *NR* és *NO* ⊥ *MR*, ezért *O* az *MNR* háromszög magasságpontja, következik *RO* ⊥ *MN*.

A tükrözés értelmében *OP* ⊥ *MN*. Mivel *OP* és *OR* ugyanarra az *MN* egyenesre merőlegesek, ezért *P, O, R* kollineáris pontok.

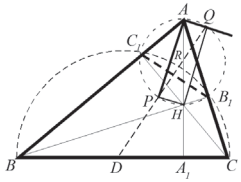
III. 4. Kollinearitás bizonyítása a szakasz felezőmerőlegesével.

Felhasználjuk, hogy egy szakasznak egyetlen felezőmerőlegese van. Ez a III. 3.-nak sajátos esete.

Feladat:

Legyen *P, Q* az *ABC* hegyesszögű háromszög *H* magasságpontjának az *A* szög belső illetve külső szögfelezőjére eső vetülete. Igazolja, hogy *P, Q* és a *BC* oldal felezőpontja egy egyenesen helyezkednek el.

Megoldás:



AA_1, BB_1, CC_1 a háromszög magasságai.

A BAC szög belső szögfelezője AP külső szögfelezője pedig AQ, tudjuk, hogy $AP \perp AQ$.

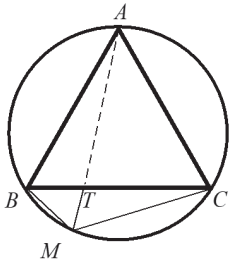
Szerkesztés szerint $HP \perp AP$ és $HQ \perp AQ$, így $APHQ$ téglalap, amelynek átlói egyenlő hosszúak és felezik egymást, vagyis $AH = PQ$ és R mindkét átló felezőpontja és egyben a téglalap köré írt kör középpontja. AB_1HC_1 húrnégyszög, mert két szembefekvő szöge derékszög, a köré írt kör átmérője AH, vagyis ugyanaz a kör megy át az A, Q, B_1, H, P, C_1 pontokon, tehát PQ a B_1C_1 szakasz felezőmerőlegesén található.

BC_1B_1C szintén húrnégyszög, mert $BC_1C\sphericalangle = BB_1C\sphericalangle = 90°$, a köré írt kör átmérője BC, tehát e kör középpontja a BC szakasz D felezőpontjában van. Ezek szerint a B_1C_1 szakasz felezőmerőlegese átmegy a D ponton is, tehát P, Q, D kollineáris pontok.

III. 5. Kollinearitás bizonyítása szögfelezővel

Felhasználjuk, hogy egy szögnek egyetlen belső illetve egyetlen külső szögfelezője van.

Ez a III. 2.-nek sajátos esete.



Feladat:

Legyen M az ABC szabályos háromszög köré írt kör BC kiskörívének egy tetszőleges pontja. A BMC szög szögfelezője a BC oldalt T-ben metszi. Bizonyítsa be, hogy M, T, A kollineáris pontok.

Megoldás

$BMA\sphericalangle = CMA\sphericalangle = 60°$. Tehát a BMC szög belső szögfelezője MT és MA is, következik M, T, A kollineáris pontok.

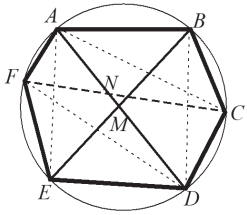
III. 6. Kollinearitás bizonyítása szakasz adott arányban való osztásával.

Felhasználjuk, hogy egy szakaszt adott arányban egyetlen belső pont (egyetlen külső pont) oszt fel.

Feladat:

Legyen $ABCDEF$ egy körbeírt konvex hatszög és legyen M az AD

és *BE* átlók metszéspontja. Bizonyítsa be, ha $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$, akkor *F, C, M* kollineáris pontok.



Megoldás:

A rajz elkészítésekor nem tudjuk figyelembe venni az $AB \cdot CD \cdot EF = BC \cdot DE \cdot AF$ (1) összefüggést, ezért a *CF* egyenes az *AD*-t nem az *M*-ben, hanem az *N*-ben metszi. Bebizonyítjuk, hogy az (1) feltétel biztosítja, hogy az *M* és *N* ugyanolyan arányba osztja az *AD* szakaszt, vagyis *M* egybeesik az *N*-el. A szögek egyenlősége miatt felírhatjuk egy sor háromszög hasonlóságát, nevezetesen $AMB_{\Delta} \sim EMD_{\Delta}$, $AME_{\Delta} \sim BMD_{\Delta}$,

ahonnan $\frac{AM}{ME} = \frac{AB}{DE}, \frac{ME}{MD} = \frac{AE}{BD}$ és $\frac{AM}{MD} = \frac{AB \cdot AE}{DE \cdot BD}$ (2)

Hasonlóan $ANC_{\Delta} \sim FND_{\Delta}$, $ANF_{\Delta} \sim CND_{\Delta}$, ahonnan $\frac{AN}{ND} = \frac{AC \cdot AF}{DF \cdot CD}$ (3)

Az *ADEF* és *ABCD* húrnégyszögekben a Ptolemaiosz tétel értelmében $AE \cdot DF = AD \cdot EF + DE \cdot AF$ (4)

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ (5)

Mivel a (2) és (3) egyenlőségét akarjuk kimutatni, ezért (4)-et beszorozzuk $AB \cdot CD$-vel és (5)-öt pedig $AF \cdot DE$-vel.

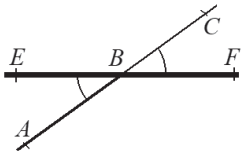
$AB \cdot CD \cdot AE \cdot DF = AB \cdot CD \cdot AD \cdot EF + AB \cdot CD \cdot DE \cdot AF$ (6)

$AC \cdot BD \cdot AF \cdot DE = AB \cdot CD \cdot AF \cdot DE + BC \cdot AD \cdot AF \cdot DE$ (7)

Ha (6) jobboldalán az első tagba behelyettesítjük az (1) bal oldalán álló szorzat helyett a jobboldali szorzatot, akkor a (6) és (7) jobb oldalán azonosak lesznek az összegek, ahonnan a baloldalak egyenlősége következik $AB \cdot CD \cdot AE \cdot DF = AC \cdot BD \cdot AF \cdot DE$,

amely $\frac{AB \cdot AE}{DE \cdot BD} = \frac{AC \cdot AF}{DF \cdot CD}$ alakba is írható és (2), (3) felhasználásával $\frac{AM}{MD} = \frac{AN}{ND}$. Tudva, hogy *M, N* az *AD* szakasz belső pontjai, ezért $M = N$ és ezzel bebizonyítottuk, hogy *C, M, F* kollineáris pontok.

IV. Kollinearitás bizonyítása a csúcsszögek tételének fordítottjával



Az *E, B, F* pontok a *d* egyenesen helyezkednek el és az *A* és *C* pont a *d*-hez viszonyítva a két ellentétes félsíkban található.

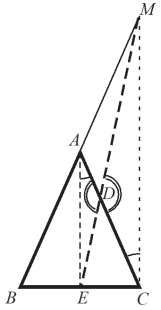
Ha $ABE\sphericalangle = CBF\sphericalangle$, akkor *A, B, C* kollineáris pontok.

Feladat:

Az *ABC* egyenlő szárú háromszögben *AB* = *AC*. Az *AB* oldalt meghosszabbítjuk *AM* = *AB*-vel.

Legyen *D* az *AC* oldal *A*-hoz közelebb eső harmadoló pontja és *E* a *BC* oldal felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy *M, D, E* kollineáris pontok.

Megoldás:



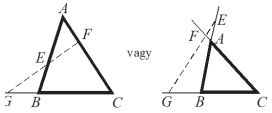
A *BMC* háromszög *C*-ben derékszögű, mert *AB* = *AM* = *AC*, így $MC \perp BC$. Az *ABC* egyenlő szárú háromszögben *AE* az alapra húzott súlyvonal, ezért $AE \perp BC$.

$MC \perp BC$ és $AE \perp BC$ következik $MC \parallel AE$ és $DAE\sphericalangle = DCM\sphericalangle$ (belső váltószögek). A *BCM* háromszögben *AE* középvonal, ezért $CM = 2 \cdot AE$, adott $CD = 2 \cdot AD$.

Mivel $DAE = DCM$ és $\frac{AE}{CM} = \frac{AD}{CD} = \frac{1}{2}$, ezért $ADE_{\Delta} \sim CDM_{\Delta}$, így $DAE\sphericalangle = CDM\sphericalangle$.

E és *M* az *AC* egyenes két oldalán helyezkedik el és $ADE\sphericalangle = CDM\sphericalangle$, ezért a csúcsszögek fordított tétele értelmében *M, D, E* kollineáris pontok.

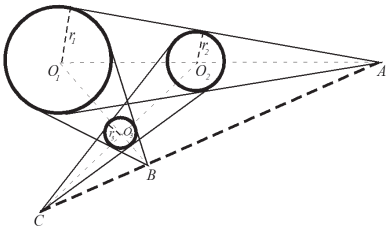
V. Kollinearitás bizonyítása Menelaosz tételének fordítottjával



Ha *E, F, G* az *ABC* háromszög két oldalán és a harmadik oldal meghosszabbításán (vagy mindhárom pont az oldalak meghosszabbításán) található és teljesül az

$\frac{EA}{EB} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{GB}{GC} = 1$ egyenlőség, akkor *E, F, G* kollineáris pontok.

Feladat:



Adott három egymástól különböző sugarú kör, amelyek egymáson kívül helyezkednek el és nem metszik egymást. A páronként társított körökhöz húzott közös külső érintők *A, B, C*-ben metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy *A, B, C* kollineáris pontok.

Megoldás:

Ha a körök középpontjai O_1, O_2, O_3 és sugaraik r_1, r_2, r_3, akkor legyen A az O_1O_2, B az O_1O_3, C az O_2O_3 egyenesen. Felhasználjuk, hogy két kör közös külső érintői a körök középpontjait összekötő egyenesen metszik egymást és e metszéspontnak a középpontokig való távolságaiknak az aránya a körök sugarainak arányával egyenlő.

Az O_1, O_2, O_3 háromszögben $\frac{AO_1}{AO_2} \cdot \frac{BO_3}{BO_1} \cdot \frac{CO_2}{CO_3} = \frac{r_1}{r_2} \cdot \frac{r_3}{r_1} \cdot \frac{r_2}{r_3} = 1$,

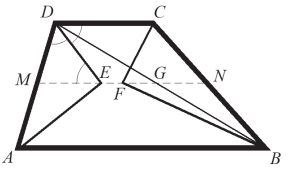
tehát a Menelaosz tételének fordítottja értelmében *A, B, C* kollineáris pontok.

Megjegyzés: A IV. feladatnál a Menelaosz tételének fordítottjával is dogozhatunk, ugyanis $\frac{MA}{MB} \cdot \frac{DC}{DA} \cdot \frac{OB}{OC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$, tehát *M, D, E* kollineáris pontok.

VI. Bizonyítjuk, hogy a pontok ismert egyenesen helyezkednek el

Ez az egyenes lehet a háromszög valamelyik nevezetes egyesese, vagy középvonala, a trapéz középvonala, a paralelogramma átlója, és bármely más egyenes is (például az Euler-egyenes, a Simson-egyenes, stb.)

Feladat:



Az *ABCD* trapézban $AB \parallel CD$. A *BAD* és *CDA* szögek szögfelezői *E*-ben, az *ABC* és *BCD* szögek szögfelezői *F*-ben metszik egymást és *G* az *BD* átló felezőpontja. Bizonyítsa be, hogy *E, F, G* kollineáris pontok.

Megoldás:

Legyen *M, N* az *AD, BC* felezőpontja.

$AED\sphericalangle = 180° - (EAD\sphericalangle + ADA\sphericalangle) = 180° - \frac{BAD\sphericalangle + CDA\sphericalangle}{2} =$

$180° - \frac{180°}{2} = 90°$, ezért $ME = MD$ és $MED\sphericalangle = MDE\sphericalangle = CDE\sphericalangle$,

így $EM \parallel CD$, tehát *E* a trapéz *MN* középvonalán található.

Hasonlóan bizonyítjuk, hogy $F \in MN$ és a trapéz átlójának *G* felezőpontjáról tudjuk, hogy a középvonalon található.

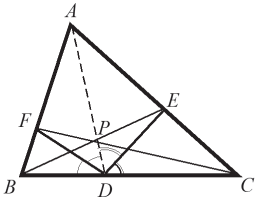
Tehát *E, F, G* a trapéz középvonalának pontjai, vagyis *E, F, G* kollineáris pontok.

VII. A feladatot átalakítjuk három egyenes összefutásának bizonyítására

Azoknál a feladatoknál alkalmazhatjuk, ahol egy pont két egyenes metszéspontjaként van adva és a másik két ponton átmenő egyenesről bizonyítható, hogy összefut az előző két egyenessel.

Feladat:

Legyen *D* az *ABC* háromszög *BC* oldalán egy tetszőleges pont. Az *ADC, ADB* szögek szögfelezői az *AC* illetve *AB* oldalt *E, F*-ben metszi és a *BE, CF* metszéspontja *P*.



Bizonyítsa be, hogy *A, D, P* kollineáris pontok.

Megoldás:

Igazoljuk, hogy *AD* átmegy a *P* ponton vagyis *BE, CF, AD* összefutó egyenesek.

Az *ADC* és *ADB* háromszögekben a szögfelezőtétel értelmében

$$\frac{EC}{EA} = \frac{DC}{AD}, \frac{FA}{FB} = \frac{AD}{BD}.$$

$\frac{DB}{DC} \cdot \frac{EC}{EA} \cdot \frac{FA}{FB} = \frac{BD}{DC} \cdot \frac{DC}{AD} \cdot \frac{AD}{BD} = 1$, a Ceva tételének fordítottja értelmében *BE, CF, AD* összefutó egyenesek, tehát *P* az *AD*-re illeszkedik, vagyis *A, D, P* kollineáris pontok.

VIII. Visszavezetés ismert kollinearitás feladatra

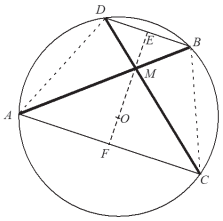
Egyéntől függ, hogy ki hány neves kollinearitás feladatot (tételt) ismer. Itt csak hármat említek.

– A trapéz alapjainak felezőpontjai, az átlók metszéspontja és a szárak meghosszabbításának metszéspontja egy egyenesen helyezkedik el.

– Két metsző kör egyik metszéspontja és a másik metszéspontjának átmérősen ellentett pontjai egy egyenesen helyezkednek el.

– Egy háromszög köré írt kör tetszőleges pontjának a háromszög oldalaira eső vetületei egy egyenesre esnek. (Simson-egyenes).

Feladat:



Az *O* középpontú körben *AB* és *CD* egyenlő hosszúságú húrok, amelyek *M*-ben metszik egymást (*A* és *D* az *OM* ugyanazon az oldalán található). Legyen *E, F* a *BD, AC* felezőpontja.

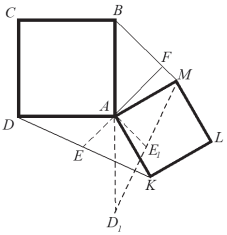
Bizonyítsa be, hogy *E, M, F, O* kollineáris pontok.

Megoldás:

Könnyen bizonyítható, hogy *ACBD* egyenlő szárú trapéz, amelynek szimmetriatengelye az *EF*, amely átmegy az átlók *M* metszéspontján és merőleges az alapokra, tehát átmegy a kör *O* középpontján is. Tehát *E, M, F, O* kollineáris pontok.

IX. Kollinearitás bizonyítása geometriai transzformációval

Felhasználjuk, hogy a geometriai transzformációk kollineáris pontoknak kollineáris pontokat feleltetnek meg (legyen az középpontos tükrözés, tengelyes tükrözés, pont körüli elforgatás, eltolás, vagy középpontos hasonlóság). A geometriai transzformációkkal közvetlenül is bizonyíthatunk, de a leggyakrabban a más módszerek alkalmazásánál hívjuk őket segítségül. Itt csak egyetlen mintafeladat bemutatására van lehetőség, érdemes e témával külön is foglalkozni.



Feladat:

Az *ABCD* és *AKLM* egymáson kívül eső négyzeteknek csak az *A* csúcsa közös (lásd

az ábrát). Legyen a DK szakasz felezőpontja E és az A pontból a BM egyenesre húzott merőleges talppontja F.

Bizonyítsa be, hogy E, A, F kollineáris pontok.

Megoldás:

Az D, E, K kollineáris pontoknak az A pont körüli +90°-os elforgatással kapott képei D_1, E_1, M és mivel a forgatás távolságtartó transzformáció, ezért E_1 az D_1M szakasz felezőpontja.

B, A, D_1 egy egyenesen helyezkedő pontok és $AB = AD_1$, így az MBD_1 háromszögben AE_1 középvonal, tehát $AE_1 \parallel BM$. Mivel $AE \perp AE_1$ és $AE_1 \parallel BM$ következik $AE \perp BM$, de $AF \perp BM$, tehát E, A, F kollineáris pontok (III.3.).

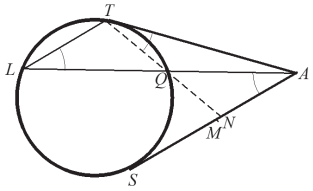
X. Kollinearitás bizonyítása „reductio ad absurdum" módszerrel

Feltételezzük, hogy az egyik pont nincs rajta a másik két pont által meghatározott egyenesen és addig visszük a gondolatot, míg ellenmondáshoz jutunk, innen arra következtetünk, hogy hibás volt a feltevés, tehát a három pont egy egyenesen helyezkedik el (indirekt bizonyítás).

Ezt a módszert gyakran alkalmazzuk (így bizonyítjuk például a csúcsszögek tételének, a Menelaosz tételnek, vagy a Ceva tételnek a fordítottját és a III.-nál bemutatott feladatok így is oldhatók) Bemutatása csak azért került a X. helyre, mert az I-IX-ben a direkt módszereket mutattuk be.

Feladat:

Egy körön kívül eső A pontból meghúzzuk a körhöz az AS és AT érintőket.



Legyen TL az AS-el párhuzamos húr, AL a kört másodszor Q-ban metszi és M az AS felezőpontja.

Bizonyítsa be, hogy T, Q, M kollineáris pontok.

Megoldás:

Feltételezzük, hogy a TQ egyenes az AS-et N-ben metszi és $N \neq M$.

Tekintettel arra, hogy $NTA\sphericalangle = TLA\sphericalangle$ (azonos körívet közrefogó kerületi szögek) és $TLA\sphericalangle = NAQ\sphericalangle$ (belső váltó szögek), következik

$NTA\sphericalangle = NAQ\sphericalangle$, TNA közös, ezért $TNA_\Delta \parallel ANQ_\Delta$ és $\dfrac{AN}{QN} = \dfrac{NT}{AN}$,

ahonnan $AN^2 = NT \cdot NQ$, de $NT \cdot NQ = NS^2$ (a Q pontnak a körre vonatkoztatott hatványa), következik $AN = NS$ vagyis N az AS felezőpontja. Ellenmondás, mert egy szakasznak csak egy felezőpontja van, tehát $N = M$ és így T, Q, M kollineáris pontok.

A pontok kollinearitása még bizonyítható koordinátageometriával, vektorokkal, és komplex számokkal (itt csak a klasszikus síkgeometriai bizonyítási módszerek bemutatása volt a cél).

E bizonyítási módok szemléltetésére mindenki egyénileg kell keressen a tananyaggal és az osztályok színvonalával összhangban lévő minta, gyakorló, szorgalmi illetve házi feladatokat.

Más témakörökben is célszerű ehhez hasonló feladatsorokat összeállítani és használni.

Olosz Ferenc
Szatmárnémeti

Miért kellenek nekünk a definíciók?

Oláhné Téglási Ilona adjunktus, PhD
Eszterházy Károly Egyetem, Eger
Pedagógusképző Központ/Matematikai és Informatikai Intézet

Bevezetés

Ambrus tanár úrral 2002-ben találkoztam először, amikor jelentkeztem az ELTE szakvizsgás pedagógus képzésére. Bár 1989-ben az ELTÉ-n szereztem matematika-fizika szakos tanári diplomát, akkori egyetemi éveim alatt nem találkoztam vele. Később, a pedagógus szakvizsga megszerzését célzó képzés alatt viszont nagyon sok olyan dolgot hallottam, tanultam tőle a matematika tanításával kapcsolatban, amit addig senkitől sem. Pedig akkor már 10 éve tanítottam matematikát – de a különböző fogásokra, megközelítésekre, reprezentációkra, tanítási-tanulási stratégiákra igazán Ő hívta fel a figyelmemet. Gyakran emlegetem – hallgatóimnak is – az egyik kedvenc mondását, mely szerint az igazi tanár a 90% tanára!

Nem volt könnyű megfelelni az elvárásainak. A feladatok, amelyeket kiadott nekünk, sok gondolkodást és kreativitást igényeltek. Tőle tanultam meg azt is, mit jelent a módszertani kutatás. Ő indított el azon az úton, melynek végére a Debreceni Egyetem Matematikai és Számítástudományi Doktori Iskolájának Didaktika szakirányán PhD oklevelet szereztem. Bár a témavezetőm nem Ő volt, mégis nagyon sokat segítettek a dolgozatom felépítésében, megírásában építő jellegű, kritikus megjegyzései, melyeket a kutatásom egy-egy fázisához tett. Sokszor új irányba terelte a gondolkodásomat egy-egy hozzászólása, megjegyzése. A problémamegoldással kapcsolatos kutatásaiból is rengeteget tanultam – és tanulok a mai napig.

Kérdésfelvetés

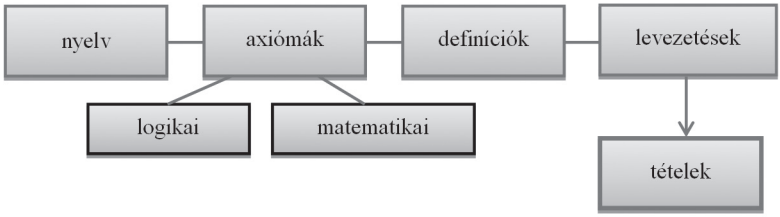
A téma, amelynek feldolgozásába belekezdtem, szintén az András által belém táplált, a tanítási-tanulási módszerekkel kapcsolatos kritikus gondolkodásból fakad. Az Eszterházy Károly Egyetemen tanítok leendő matematikatanárokat, és levelező tagozaton gyakorló tanárokat. Az óráimon gyakran esik szó a definíciókról, azok szerepéről. Meglepődve tapasztalom időről-időre, hogy még a matematikában bizonyos jártassággal rendelkezők sem mindig vannak tisztában azzal, hogy a matematika könyvekben (alapvetően az általános és középiskolai tankönyvekben, illetve a matematikát népszerűsítő olvasmányokban) szereplő mondatok vajon a matematika, mint tudomány struktúrájában hol helyezkednek el, milyen szerepet játszanak: definíciók, tételek, axiómák, egyszerű kijelentések. Az egyetemi vagy főiskolai tanulmányaik során, ahol már a matematika egyes területei külön-külön axiomatikusan épülnek fel, a nagyobb matematikai szigorúság miatt ezek a fogalmak tisztán kellene, hogy megjelenjenek. **Miért van mégis annyi bizonytalanság annak eldöntésében, hogy az adott kijelentő mondat definíció-e, ha nincs odaírva a mondat elé a szerepe? Kíváncsi lettem, vajon mennyire általános ez a bizonytalanság és mi lehet ennek az oka.** Ezért összeállítottam egy kérdőívet, melyben 25, általános és középiskolai matematika tankönyvekből szó szerint vett mondatról kell eldönteni, hogy milyen szerepet játszik a matematika felépítésében: definíció, axióma, tétel, vagy egyik sem. A kérdőívet kitöltötte 90 személy, akik között voltak matematikatanár szakos hallgatók (1-4 évfolyam) és gyakorló matematikatanárok egyaránt (szándékosan olyan személyeket kértem a teszt kitöltésére, akiktől nem áll távol a matematika, hiszen a matematikát hétköznapi szinten használó számára ezek a kérdések nem relevánsak). Ennek elemzése során szeretnék választ kapni a feltett kérdésekre.

A definíciók szerepéről általánosságban

A formális axiomatikus elméletekben, így a matematikai elmé-

letekben is fontos szerepük van a definícióknak (meghatározásoknak). A formális axiomatikus elméletek célja, hogy egy adott elméletben pontosan megfogalmazott kérdéseket tegyünk fel, és ezeket pontos (logikai) módszerekkel megválaszoljunk.

Egy elmélet sémája a következőképpen ábrázolható:



Matematikai tanulmányaink során számos elmélettel találkozunk, melyekben sokféle definíció szerepel. G. Frege szerint:

„Helyénvaló itt tisztáznunk, hogy mi a definiálás, és mit lehet vele elérni. Úgy látszik, hogy sokan teremtő erőt tulajdonítanak neki, ámbár semmi egyéb nem történik, mint hogy valamit elhatárolva kiemelünk, és névvel jelölünk meg. Ahogy a geográfus sem teremt tengert, mikor határvonalakat húz és ezt mondja: a vízfelszínnek ezen vonalakkal határolt részét Sárga-tengernek fogom hívni, úgy a matematikus sem tud definiálásával semmit sem alkotni a valóságban. Egy dolognak sem varázsolhatunk olyan tulajdonságokat pusztán definícióval, amelyekkel az eleve nem bír, kivéve azt az egyet, hogy a neve az legyen, aminek elneveztük… Éppígy pusztán definiálás révén a lusta diákot szorgalmassá lehetne tenni." [10, 200. o.]

A definíció logikai funkciója tehát az, hogy a tárgyalást tömörebbé, áttekinthetőbbé tegye, adott tulajdonságokkal rendelkező objektumoknak, fogalmaknak nevet adjon. Egy elmélet definíciói különböző jelentőségűek lehetnek: van amikor csak egy névadásról van szó (pl. trapéznak nevezzük azokat a konvex négyszögeket, melyeknek van párhuzamos oldalpárjuk), vagy egy jelölés bevezetéséről (pl. $\leqq$, $a^0:=1$), de akadnak olyan definíciók is, melyek megalkotása hosszú folyamat eredménye és az elmélet további sorsát határozza meg (pl. a határérték Cauchy-féle definíciója).

A definíció (vagy meghatározás) logikai szerkezete:

A definíció formailag szabatos, ha
- a definiendumban és a definiensben ugyanazok a változók szerepelnek;
- a definiálandó fogalom, objektum a definiensben nem szerepel.

A definíció tartalmilag akkor helyes, ha
- a definiendumot ugyanabban az értelemben használjuk, mint a definienst;
- egy konkrét objektumról el tudjuk dönteni, hogy az adott definícó hatálya alá esik-e (egy pontosan meghatározott halmazt ad meg).

A közlés szempontjából pedig (így a pedagógiai gyakorlatban is) akkor célravezető a definíció, ha a befogadók ismerik a meghatározó részben szereplő kifejezéseket. Természetesen egyes fogalmakat különbözőképpen is meghatározhatunk – ez a matematikában, de a hétköznapi életben is előfordul. Ekkor meg kell vizsgálnunk, hogy a különböző definíciók egyenértékűek-e, ugyanazt a halmazt határozzák-e meg.

Lehetne hasonló, vagy még mélyebbre ható részletességgel tárgyalni az axiómák és tételek szerepéről is, de az meghaladná jelen cikk kereteit. Vizsgálatomban inkább a definíciókkal szeretnék foglalkozni, mert úgy gondolom, a matematika felépítésében, a matematikáról kialakítandó képben – és így az oktatásban is – centrális szerepet játszanak. A fogalomalkotás kiteljesedését jelentik, hiszen ezek képezik alapját a további matematikai tevékenységnek. Az axiómák és tételek szerepe a matematika tanításában viszonylagos: a tárgyalás szintjétől függ, hogy egy állítást axiómaként vagy tételként kezelünk-e. Több példáját is találhatjuk annak, hogy amit általános iskolai szinten még axiómaszerűen kimondunk, esetleg

szemléletesen bemutatunk, azt a középiskolában (vagy a felsőoktatásban) már tételként bizonyítunk. Ilyenek például a műveleti tulajdonságok, legyen szó akár bizonyos algebrai műveletek, akár geometriai transzformációk kommutativitásáról, asszociativitásáról, disztributivitásáról.

A vizsgálat tesztje és eredményei

A vizsgálatom tárgyát képező tesztben szereplő mondatok mindegyikét sokak által ismert és használt általános és középiskolai könyvekből vettem, melyeket az irodalomjegyzékben felsoroltam. Van, amelyik előtt a könyvben jelölve van, hogy „definíció", „tétel", „axióma", de van, ahol ez hiányzik. „Helyes" megoldásnak a könyvben megjelölt kitételt tekintettem, ahol pedig ez nem szerepelt, ott a matematika irányelveit illetve a tankönyvíró valószínűsíthető szándékát tekintettem irányadónak.

A teszt mondatai a következők voltak:

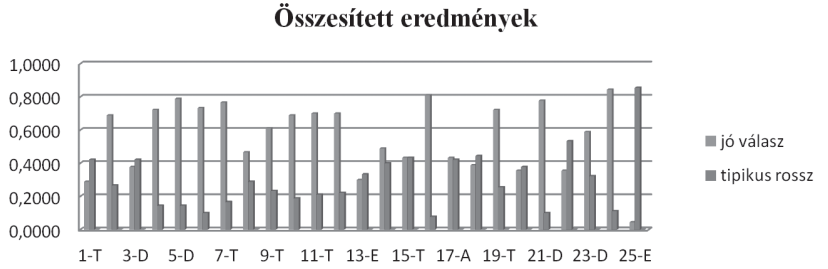
1. Az 1 minden természetes számnak osztója. [1, 50. oldal]
2. Két ponton át pontosan egy egyenes húzható. [1, 76. oldal]
3. Az egyenest egy pontja két félegyenesre bontja. [1, 76. oldal]
4. A pont és az egyenes távolsága a ponttól az egyenesig húzott merőleges szakasz hossza. [1, 79. oldal]
5. Legyen az U alaphalmaznak A egy nem üres részhalmaza. Az A halmazon értelmezett függvénynek nevezzük azt a hozzárendelést, ha az A halmaz minden elemének pontosan egy képe van, a K halmazban. [2, 120. oldal]
6. Az egybevágósági transzformáció szögtartó. [2, 167. oldal]
7. Bármely a, b természetes számhoz ($b \neq 0$) található olyan egyértelműen meghatározott k és r természetes szám, amelyre $a=b \cdot k+r$, és $0 \leq r < b$ teljesül. [2, 201. oldal]
8. A 0 természetes szám. [bevallom, itt csaltam egy kicsit, ez így egyik felsorolt tankönyvben sem szerepel…]
9. Egy szám összes osztóinak számát megkapjuk, ha a szám prímtényezős felbontásában szereplő prímhatványok kitevőinek 1-gyel növelt értékeit összeszorozzuk. [2, 202. oldal]

10. Egy adatsor terjedelme a legnagyobb és legkisebb adat különbsége. [2, 256. oldal]
11. Egy adott n elemű halmaz permutációinak száma *n!* [3, 14. oldal]
12. A 10-es alapú logaritmus jele lg. [3, 93. oldal]
13. Egy irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort. [4, 233. oldal]
14. Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége az $\vec{a}+(-\vec{b})$ vektor. [4, 238. oldal]
15. Minden alakzat egybevágó önmagával. [4, 242. oldal]
16. Bármely A, B, C alakzatra, ha A≅B és B≅C, akkor A≅C. [4, 242. oldal]
17. Egy állítás igaz vagy hamis lehet csak, harmadik eset nincs. [7, 7. oldal]
18. A többtagú kifejezés egytagúak összege. [5, 34. oldal]
19. Azonos kitevőjű hatványok szorzata egyenlő az alapok szorzatának ugyanilyen kitevőjű hatványával. [5, 56. oldal]
20. $a^0=1$, amennyiben $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, azaz bármely 0-tól különböző valós szám 0 kitevőjű hatványa 1. [5, 57. oldal]
21. Az x valós szám egészrésze az a legnagyobb egész szám, amely kisebb az x-nél, vagy egyenlő vele. [5, 106. oldal]
22. Két metsző egyenesre egyetlen sík illeszkedik. [5, 143. oldal]
23. Ha két egyenletnek azonos alaphalmazon ugyanaz a megoldáshalmaza, akkor azt mondjuk, hogy ezek az egyenletek ekvivalensek a gyökök halmazára vonatkozóan. [6, 188. oldal]
24. Minden hegyesszög szinusza egyenlő a pótszögének koszinuszával. [6, 280. oldal]
25. Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük. [5, 234. oldal]

Mindegyik tesztfeladatra a következő négy válasz közül kellett egyet választani: definíció – axióma – tétel – egyik sem.

Nem szándékom azt vizsgálni és értékelni, hogy a fenti mondatok mennyire helyesek vagy precízek, ez a tankönyvek szakmai lektorainak tisztje. Pusztán azt szeretném elemezni, hogy a tesztek kitöltői miként vélekedtek róluk. A kapott eredmények nagyon változatos képet mutatnak: egy-egy kérdésre többféle különböző

választ is adtak, a következő táblázat tartalmazza a helyes és legjellemzőbb hibás válaszok arányát.



Az egyes tesztkérdésekre a teljesség kedvéért álljanak itt a helyes és a tipikus rossz válaszok arányai (természetesen egy-egy kérdésre többféle hibás válasz is érkezett, de ezek közül a legjellemzőbbet emeltem ki, ezért az arányok összege nem mindenhol adja ki az 1-et) két tizedes jegyre kerekítve:

Kérdés	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.
Helyes válasz	T	A	D	D	D	T	T	A	T	D	T	E	E
aránya	0,29	0,69	0,38	0,72	0,79	0,73	0,77	0,47	0,61	0,69	0,70	0,70	0,30
Tipikus rossz v.	A	T	A	A	T	D-E	D	E	E	E	D	D	D
aránya	0,42	0,27	0,42	0,14	0,14	0,10	0,17	0,29	0,23	0,19	0,21	0,22	0,33
Kérdés	14.	15.	16.	17.	18.	19.	20.	21.	22.	23.	24.	25.	
Helyes válasz	D	T	T	A	D	T	D	D	T	D	T	E	
aránya	0,49	0,43	0,81	0,43	0,39	0,72	0,36	0,78	0,36	0,59	0,84	0,04	
Tipikus rossz v.	T	A	E	E	E	D	T	E	A	T	D	D	
aránya	0,40	0,43	0,08	0,42	0,44	0,26	0,38	0,1	0,53	0,32	0,11	0,86	

Elemzés

Azokkal a feladatokkal szeretnék foglalkozni, amelyek esetében a tipikus rossz válaszok aránya 0,25 felett van. Úgy gondolom, hogy ahol a válaszadók legalább negyede hibásan válaszol, ott valószínűleg valamilyen általánosabb hiba bújhat meg a háttérben. Ne fe-

lejtsük el, hogy a válaszadók mind aktívan foglalkoznak a matematikával – vagy tanulmányaikban, vagy munkájukban! A definíciók közül ezt a 3., 14., 18., 20., 23. kérdéseknél figyelhetjük meg.

A 3. tesztkérdés: „Az egyenest egy pontja két félegyenesre bontja." – a válaszadók 42%-a szerint axióma. Ezen nem igazán csodálkozhatunk, hiszen ez a mondat leggyakrabban – mint az idézett tankönyvben is – a geometriai axiómákkal szokott együtt szerepelni. Nem egyértelmű a megfogalmazása sem, mert nem látszik benne tisztán a definíció logikai felépítése. Ez okozhatja sokak fejében a keveredést. A mondat hasonlóan jelenik meg az egyetemi tankönyvként hosszú évtizedek óta használt Hajós könyvben is: „Az egyenest egy pont két *félegyenesre* bontja fel." [11] Miért kell mégis ezt definíciónak tekintenünk? A Hajós-féle könyvben a dőlt betűs kiemelés jelzi számunkra, hogy itt egy új fogalom bevezetéséről van szó, melyet két alapfogalom, a pont és az egyenes segítségével definiál. Hasonlóképpen jár el a szakasz definiálása esetében is, ott sem jelenik meg a klasszikus logikai struktúra. Ám a szövegkörnyezetből, és az ezen új fogalmak segítségével megfogalmazott elválasztási axiómákból kiderül, hogy itt egyértelműen definíciókról van szó. Természetesen a középiskolai tankönyvekben nem lehet ilyen részletességgel tárgyalni a geometria alapjait. Ezért a tankönyvekben sokszor egy egyszerűbb, rövidebb megfogalmazásnak van csak helye. A tankönyvek szerzői nyilván tisztában vannak a magasabb matematikai rendező elvekkel, de az adott szint, a tanulók gondolkodásának fejlettsége nem kívánja azt a precizitást. Azonban a tesztem válaszadói a középiskola első évfolyamának gondolkodásánál magasabb szinten kell, hogy legyenek matematikából. Mégis sokan tévesztettek – a legtöbb hibás válasz az 1. éves tanár szakos hallgatók, és a levelezős mesterképzéses hallgatók között volt (akik már rendelkeznek egy matematikatanári diplomával).

A 14. tesztkérdés: „Az $\vec{a}$ és $\vec{b}$ vektorok különbsége az $\vec{a} + (-\vec{b})$ vektor." – a válaszadók 40%-a szerint tétel. Itt is azt látjuk, hogy a klasszikus szerkezet nem jelenik meg, ami felületes szemlélőben a tétel látszatát kelti. A tankönyvekben gyakran tapasztalhatjuk,

hogy a könnyebb érthetőség kedvéért, ahol csak lehet, anyanyelvi szöveggel írják le az új ismereteket a matematikai szimbólumok helyett. Ez didaktikailag helyes, és követendő út, természetesen kiegészítve ábrákkal. Ha a matematikai szimbólumokban járatosabb személynek a következő formában jelent volna meg a fenti definíció: $\vec{a} - \vec{b} := \vec{a} + (-\vec{b})$, akkor vajon kevesebben tévesztették volna el? Erre a kérdésre utólag nem tudunk válaszolni, talán ebben a formában számukra egyértelműbb lett volna. De még a középiskolai szinten is egyértelművé lehetett volna tenni a mondat szerepét egy „legyen" szócska beiktatásával. Hogy miért éppen tételnek gondolták olyan nagy arányban a válaszadók, arra nem sikerült rájönnöm – a tételeket bizonyítani szokták – vajon a fejekben miféle „bizonyítás" jelenhetett meg a mondat olvasása közben?

A 18. tesztkérdés: „A többtagú kifejezés egytagúak összege." – a válaszadók 44%-a szerint egyéb. Azaz sem axiómának, sem tételnek nem tartották, de a definíciót is elvetették. Ennél kevesebben, mindössze 39% szavazott a definícióra. Ennél a definíciónál egyértelműnek látszik az ok, nem jelenik meg a tipikus, felismerhető szerkezet. Ha ezt úgy írták volna le, hogy „többtagú kifejezésnek nevezzük az egytagú kifejezések összegét", akkor véleményem szerint nem hibáztak volna ennyien. És ebben az esetben ez az egyszerű nyelvtani átalakítás nem nehezítette volna az olvashatóságot és a megértést.

A 20. tesztkérdés: „$a^0=1$, amennyiben $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, azaz bármely 0-tól különböző valós szám 0 kitevőjű hatványa 1" – a válaszadók 38%-a szerint tétel. Ebben az esetben is kevesebben, mindössze 36% találta el (tudta) a helyes választ, a többi pedig megoszlott a maradék két lehetőség között. Ebben a mondatban egyrészt feleslegesen duplázódik a tartalom – elég lenne az anyanyelvi vagy a szimbolikus megfogalmazás. Mivel itt a matematikai szimbólum bevezetéséről van tulajdonképpen szó, ezért úgy gondolom, a puszta szimbólumokkal való leírás egyértelműbb lenne: $a^0:=1$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Más tankönyvek (pl. [2], [4]) ezt a mintát követik. Ebben benne van a definiáló egyenlőségjel, ami egy-

értelművé teszi a mondatot, amennyiben a használók ismerik a benne szereplő szimbólumokat – és az adott szinten, 9. évfolyamon a hasonló szimbólumok értelmezését már elvárhatjuk a tanulóktól. Az, hogy tételként jelölték meg sokan ezt a definíciót a válaszadók közül, annak lehet a következménye, hogy a 0-dik hatványt az azonos alapú hatványok osztásáról szóló tétel, és az egyenlőségi reláció tranzitív tulajdonságaalapján értelmezhetjük (***ha*** $\frac{a^n}{a^n} = 1$, és $\frac{a^n}{a^n} = a^0$, ***akkor*** $a^0 = 1$, a megfelelő feltételekkel) – mely egyértelműen tételnek látszik, ezért a magasabb matematikai ismeretekkel már találkozott válaszadókat is megtévesztheti.

A 23. tesztkérdés: „Ha két egyenletnek azonos alaphalmazon ugyanaz a megoldáshalmaza, akkor azt mondjuk, hogy ezek az egyenletek ekvivalensek a gyökök halmazára vonatkozóan." – a válaszadók 32%-a szerint tétel. Pedig ebben a mondatban szerepel egy olyan kulcs fordulat is – **„azt mondjuk"** – ami egyértelművé teszi, hogy itt definícióról van. Talán az „akkor" szó lehetett a megtévesztő? Ebben az esetben a többség, 59% jó választ adott. Ismét felvetődik a kérdés, hogy akik a tételre szavaztak, azok vajon végiggondolták, hogy ennek az állításnak az igazolásához milyen bizonyítási folyamat tartozhat?

Eddig azokat az eseteket elemeztem röviden, amelyekben definíciókat gondoltak másnak a vizsgálat résztvevői. Más irányból is vizsgálhatjuk az eredményeket: nézzük azokat az eseteket, ahol egy nem definíciónak szánt kijelentést a résztvevők definícióként jelöltek meg. Ezek közül kettő ugyanazzal a fogalommal foglalkozik, vektorral:

13. „Egy irányított szakasz egyértelműen meghatároz egy vektort." (33%)

25. „Az irányított szakaszokat vektoroknak nevezzük." (86%)

Jogosan érezték úgy a válaszadók, hogy ezek definíciók? Persze, hiszen ott van a két kulcsszó, a **„meghatároz"** és a **„nevezzük".** Viszont akkor a válaszadók több mint fele miért csak az egyiket

fogadta el definíciónak? A két tankönyv egyébként nem használja – véleményem szerint korrekt módon – ezeknél a mondatoknál a definíció szót. A problémát ebben az esetben szerintem magának a fogalomnak a nehézsége okozza: az általános és középiskolai matematika szintjén ezt a fogalmat nem igazán tudjuk korrekt módon definiálni. Példákon keresztül megismerik és használják a tanulók, de a pontos definíciót nem tudjuk megadni. A Mozaikos tankönyv [4] egyébként alapfogalomként kezeli – és talán ez a legjobb megközelítés középiskolás szinten. Az alapfogalmakat pedig nem szoktuk definiálni – építünk a gyerekek fejében fokozatosan kialakult szemléletre. Az irányított szakasz egy a geometriában használatos reprezentációja, modellje a vektornak, és mint ilyen, a fogalom teljes tartalmát nem tudjuk vele visszaadni. Az adott szituációban azonban elégséges a feladatok, problémák megoldása szempontjából. Mint ahogyan az embert is többféleképpen modellezhetjük, de a különböző modellek nem egyenértékűek: ha egy új gyógyszer kifejlesztéséhez keresünk modellt, akkor az egér megfelelő, de ha egy ruhát szeretnénk elkészíteni, akkor próbababát használunk [16]. A matematika különböző részterületei más-más vonatkozásban használják a vektor fogalmát, a legprecízebben az algebra írja le (axiómák segítségével, mint vektortér elemei) – ez a leírás azonban túlságosan absztrakt a középiskolai alkalmazáshoz. Arra a kérdésre, hogy a válaszadók több mint fel miért csak az egyiket tekintette definíciónak, nehéz választ adni. Talán az első esetben [4] a megfogalmazásból jobban kitűnik a reprezentációs jelleg. Az „egyértelműen meghatároz" kitétel pedig biztosítja számunkra azt, hogy amikor vektorokról van szó egy geometriai problémában, akkor bátran alkalmazhatjuk az irányított szakaszt a szemléltetéshez.

A teszt 19. kérdése: „Azonos kitevőjű hatványok szorzata egyenlő az alapok szorzatának ugyanilyen kitevőjű hatványával" a válaszadó 26%-a szerint definíció. Nos, úgy vélem, ez igazán a válaszadók matematikai ismereteinek hiányosságából fakadhat csak – hiszen ezt a tételt még középszinten is szoktuk bizonyítani!

Következtetések, összegzés

Azt gondolom, hogy a fenti tartalmi elemzés több kérdést vetett fel, mint amit ebből az egyszerű vizsgálatból meg lehet válaszolni. Több konkrét esetből az elemzéseket lehetne folytatni – amit szándékomban is áll megtenni. Néhány olyan következtetést szeretnék csak levonni, mely a matematikaoktatás szempontjából - legalább magam számára – fontos lehet.

Tudjuk Skemptől, hogy „Definíció segítségével senkinek nem közvetíthetünk az általa ismerteknél magasabb rendű fogalmakat, hanem csakis oly módon, hogy megfelelő példák sokaságát nyújtjuk." [16, 42. o.] Ezt az elvet az utóbbi évtizedek tankönyveink többsége követi, és didaktikailag helyes módon a fogalomalkotás megelőzi a definiálást. Az általános iskolai tankönyvek esetén sokszor a fogalmaknak csak egy szemléletes képe alakul ki, amit később, a középiskola során pontosítunk, és ott jelenik meg a definíció. Skemp is úgy gondolja az idézett könyvében, hogy a matematika tanulása során a definíciónak lényeges szerepe van, ez a fogalomalkotási folyamat végkifejlete, lezárása. Ezzel lesz teljes az adott matematikai fogalomról kialakult kép. Mégis, az utóbbi időben kezd „kikopni" a matematika tankönyvekből a „definíció" szó – gyakran nem írják oda a fogalmak meghatározása elé (mögé) a szerzők. Úgy gondolom, hogy ezzel bizonytalan helyzetet teremtenek, mely azt eredményezi, hogy a matematika felépítésének logikai struktúráját a tanulók nem értik pontosan, ami megnehezíti a problémamegoldás folyamatát is. A világos kifejezési mód, a logikai szerkezetnek megfelelő (meghatározandó – kötőszó – meghatározó) mondatszerkesztés is segítené a bizonytalanság felszámolását. Láttuk, hogy több esetben a felismerést az akadályozza, hogy nem jelenik meg a klasszikus struktúra. Világos az a cél is, hogy a tankönyvek minél egyszerűbben, a mai gyerekek által használt nyelven íródjanak, de nem szabadna, hogy a matematikai korrektség ennek áldozatául essen. Bizonyos terminológiákat, szóhasználatokat el kell sajátíttatni a tanulókkal azért, hogy értsék, miről is szól a matematika. Ezek közé tartozik szerintem a definíció is.

Természetesen annak is meg kell találni a módját, hogy hogyan

lehet megértetni és elfogadtatni a gyerekekkel, hogy miért van szükség a definícióra. Ehhez arra volna szükség, hogy olyan játékos módszereket keressünk, melyek segítségével általánosságban lehet a meghatározás folyamatáról a definiálásról beszélni. Tallér József könyvében [9] sok olyan ötletet lehet találni, amelyek felhasználhatók a matematikaoktatásban. Érdekes megközelítéseket találhatunk a könyv 13. fejezetében: ha általános, nem feltétlenül matematikai fogalmakkal kezdve olyan kérdéseket vetünk fel az órán, hogy „mit értünk azon, hogy...?", vagy „Mit jelent az, hogy…?", majd fokozatosan rávezetjük őket a meghatározásra, akkor világosabban körvonalazódhat a definíció jelentősége. Sokan szeretik a keresztrejtvényeket, melyek lényegében definíciókat adnak, és a megfejtőnek ki kell találnia a fogalmat. Tudjuk, hogy akkor jó egy keresztrejtvény, ha egyértelműen adja meg a meghatározást. Ezért egy-egy keresztrejtvény megoldása a matematika órán szintén hasznos lehet a definíciók fontosságának felismertetésében. Még jobb azonban, ha a gyerekek maguk készítenek keresztrejtvényt az éppen tanult fogalmak felhasználásával. Szintén tetszett, és úgy gondolom jól illusztrálja a definálás problematikáját a Tallér könyvben szereplő történet Max Planckról és a „bal" meghatározásáról. Jó példát láthatunk a PRIMAS (Promoting Inquiryin Mathematics and Science Education Across Europe - a kutatásalapú tanulás előmozdításáért a matematikai és természettudományos európai alap- és középszintű oktatásban) projektben kidolgozott tananyagok között is, hogyan lehet az IBL (Inquiry Based Learning) módszert a matematikában alkalmazni [15] a definíciók fontosságának megértetésére. Ennek szellemében kidolgoztam néhány olyan feladványt, amely játékos módon próbálja bevezetni a témát. Erről 2017 januárjában tartottam rövid előadást a MIDK konferencián (https://sites.google.com/site/midk2016jan/eloadasok-anyagai). A módszert az Eszterházy Károly Egyetem online kurzusán (http://eoc.uni-eger.hu/kurzusok/a-matematika-napos-oldala) volt alkalmam kipróbálni, melynek célja a matematika iránti érdeklődés felkeltése volt. A cikk kereteibe nem fér bele, hogy a kurzusban bemutatott játékokat mind bemutassam, de érdeklődőknek szívesen közreadom.

Kívánatos lenne elérni, hogy a tanulókban kialakuló matematikai kép ne legyen zavaros, tisztán lássák a logikai felépítést akkor is, ha később nem fognak felsőbb matematikával találkozni – ezért nem lehet célja a középiskolai matematikaoktatásnak a fogalmi struktúrák olyan fellazulása, ami a vizsgálatomban megjelenő bizonytalanságokhoz vezet. Az értelmes tanulást is elősegíti, ha a fogalmi struktúrák tisztán kirajzolódnak – legfőképpen azok előtt, akik a jövő matematikatanárai lesznek. Ahogyan Kósa András professzor írja: „A tanárok, látván az eltévelyedés veszélyeit és annak megannyi megvalósulását, gondosabban készüljenek fel a tanításra. És közben válogatnak, tiszta források után kutatva." [13] Intelmeiben azt is megfogalmazza, hogy a tankönyvíróknak megfelelő konceptuális tudással kell rendelkezniük, a lektoroknak pedig kifogással kell élniük és vitatkozniuk kell minden kétes helyzetben.

Egy rövid idézettel szeretném zárni gondolataimat, mely Lewis Carroll: Alice csodaországban című könyvében szerepel, és rávilágít arra, miért is vegyük komolyan a definíció szerepét a matematikaoktatásban.

– „- Nem tudom, mit ért azon, hogy 'dicsőség' – mondta Alice. Dingidungi megvetően mosolygott.
– Hát persze hogy nem érted, amíg én meg nem mondom. Úgy értettem: 'Ez aztán elsöprő erejű érvelés, mi?'
– De hát a 'dicsőség' nem jelenti azt, hogy 'elsöprő erejű érvelés' – ellenkezett Alice.
– Ha én használok egy szót – mondta Dingidungi megrovó hangsúllyal –, akkor azt jelenti, amit én akarok, sem többet, sem kevesebbet!
– Az a kérdés – hitetlenkedett Alice –, vajon engedelmeskednek-e a szavak.
– Az a kérdés – így Dingidungi -, ki az úr és kész."

Irodalomjegyzék:

Hajdu Sándor – Czeglédy István – Czeglédy Istvánné – Zankó Istvánné: Matematika 5 – Gondolkodni jó! (Műszaki Kiadó, Bp. 2010, ISBN 978 963 164492 0)

Hajdu Sándor – Czeglédy István – Hajdu Sándor Zoltán – Kovács András: Matematika 9 – Gondolkodni jó! (Műszaki Kiadó, Bp. 2009, ISBN 978 963 164433 3)

Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 11.(Mozaik Kiadó, Szeged, 2007, ISBN 978 963 697414 5)

Kosztolányi József – Kovács István – Pintér Klára – Urbán János – Vincze István: Sokszínű matematika 9. (Mozaik Kiadó, Szeged, 2007, ISBN 978 963 697347 6)

Hajnal Imre – Számadó László – Békéssy Szilvia: 9. Matematika a gimnáziumok számára (Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp., 2002, ISBN 978 963 193129 3)

Korányi Erzsébet: Matematika a gimnáziumok 10. Osztálya számára (Konsept-H Könyvkiadó, Piliscsaba, 2002, ISBN 978 963 833284 0)

Barcza István – Basa István – Tamásné Kollár Magdolna: Matematika 10 – Újgenerációs tankönyv (OFI, Bp., 2017)

Ambrus András: Bevezetés a matematika- didaktikába (ELTE Eötvös Kiadó, 2004)

Tallér József: A logika alapjai (Mozaik Kiadó, Szeged, 1996)

G. Frege: Logika, szemantika, matematika (Gondolat Kiadó, Bp., 1980)

Hajós György: Bevezetés a geometriába (Tankönyvkiadó, Bp., 1966)

Sashalminé Kelemen Éva: A matematikai logika és a halmazelmélet elemei (EKF Líceum Kiadó, Eger, 2009)

Kósa András: Vírusok a matematikában (Nemzeti Tankönyvkiadó, Bp., 1994)

Eszes Boldizsár: A definíció (in: Szabad változók, 2007 http://www.szv.hu/cikkek/a-definicio)

Mooldijk, Ad: Talking about definitions http://www.primas-project.eu/artikel/en/1605/Talking+about+definitions/view.do?lang=en

Skemp, Richard: A matematikatanulás pszichológiája (Edge 2000 Kiadó, Bp., 2005)

Lewis Carroll. Alice Csodaországban (Helikon Kiadó, Bp. 2015)

A szerző: Oláhné Téglási Ilona, adjunktus, PhD
Eszterházy Károly Egyetem, Eger
Pedagógusképző Központ/Matematikai és Informatikai Intézet
teglasi.ilona@uni-eszterhazy.hu, teglasi.ilona@gmail.com

A szöveges feladatok különböző reprezentációi és tanításuk

Pintér Klára Szegedi Tudományegyetem
Juhász Gyula Pedagógusképző Kar
pinterk@jgypk.szte.hu

A matematikai problémamegoldás kutatása során találkoztam Ambrus András munkáival, amelyek nagy segítségemre voltak. Nemcsak a problémamegoldásról szóló írásait olvastam nagy élvezettel, hanem a matematika tanár szakos hallgatóknak szóló rendkívül hasznos didaktika jegyzetét is. Köszönettel tartozom neki a PhD dolgozatom megírásához és a szigorlatra való felkészüléshez nyújtott támogatásáért is.

Jelen cikk alapját a matematikai ismeretek különböző reprezentációiról szóló írásai ihlették.

1. A szöveges feladatok megoldásának problémái

A szöveges feladatok az iskolai matematika tananyag sokat vizsgált részét képezik, és bár a magyarországi tanulók megoldási teljesítménye az 1970-es évekhez képest valamelyest javult, ezek a feladatok manapság is sok gondot okoznak a gyerekeknek (Vidákovich, Csapó 1996; Csíkos, 2003).

A szöveges feladatok általában szituációba ágyazott, egy vagy több számtani művelettel megoldható matematikai feladatok. Ezek megoldása során a szöveggel megadott információk alapján kell a megoldás sémáját megtalálni, majd a számolást végrehajtani. A tanulók számára a probléma megértése, a megfelelő reprezentáció megtalálása okozza a nagyobb nehézséget, így célszerű a megoldásnak ezt a részét vizsgálni (Ben Zeev, 1998;

Haghverdi, 2012;). A szöveges feladatok megoldási eredményessége összefügg a szövegértési képességgel (Varga, 2016), és sikeresebb, ha a problémát a megoldó számára ismerős szituációba illesztik.Korábban Kintsch és Greeno (1985) az alapműveletek különböző megfogalmazásai alapján memorizálandó feladattípusokat határoztak meg, így a szöveges feladatok megoldásának menetét lépések egymásutánjaként írták le, amelyek során a meghatározott feladattípusokból kell választani a megoldónak figyelmen kívül hagyva a tartalomból fakadó összefüggéseket. Következő lépésként Hegarty, Mayer és Monk (1995) a problémamegoldás modelljét alkalmazta a szövegesfeladat-megoldásra, így a feladat matematikai modellje a szöveg többszöri elolvasása, többszörös visszacsatolás során születik. A szövegesfeladat-megoldási stratégiákban is megjelennek ezek az elméletek, vannak, akik a közvetlen transzláció stratégiáját követve egyszeri olvasással megtalált kulcsszavak alapján alkotnak matematikai modellt, és vannak, akik előbb a szituációt próbálják elképzelni, értelmezni, az összefüggéseket megtalálva dolgoznak.Az utóbbi években egyre inkább előtérbe kerül, hogy a matematika oktatás egyik fő feladata a tanulók felkészítése valóságközeli, gyakorlatorientált problémák megoldására (Ambrus, 2002; Ambrus-Vancsó, 1998). Tapasztalat szerint a tanulók a matematika órákon nem a „józan ész", a valóságos tapasztalatok alapján oldják meg szöveges feladatokat (Csíkos, 2003).

A következőkben néhány tipikus példát mutatunk a szöveges feladatok értelmezésének hibáira.

a) Közvetlen transzláció

A szöveges feladat modelljének megalkotására a legegyszerűbb a közvetlen transzlációs stratégia, amikor a szövegben megtalált, kijelölt kulcsszavak alapján történik az elvégzendő művelet felírása.

Dóri meghívókat rendelt a ballagására. Szombaton átadta a meghívók ***harmadát,*** *így vasárnapra már csak* ***14*** *meghívó maradt. Hány meghívót rendelt Dóri?*

A tanulók a kiemelik a harmada szót és a feladatban szereplő egyetlen számot, a 14-et, ez alapján a $3 \cdot 14 = 52$ megoldást ad-

ják. Nem veszik figyelembe a szöveg többi részét, amelyből kiderül, hogy a 14 meghívó a feltételezettel ellentétben az összesnek nem az 1/3, hanem a 2/3 része.

A tanulmány elkészítését a Magyar Tudományos Akadémia Tantárgypedagógiai Kutatási Programja támogatta.

b) Nyelvtani problémák – toldalékok

A szöveg értelmezésének, a matematikai modell megalkotásának további nehézsége, hogy a magyar nyelvben a toldalékok teljesen megváltoztathatják a mondat értelmét.

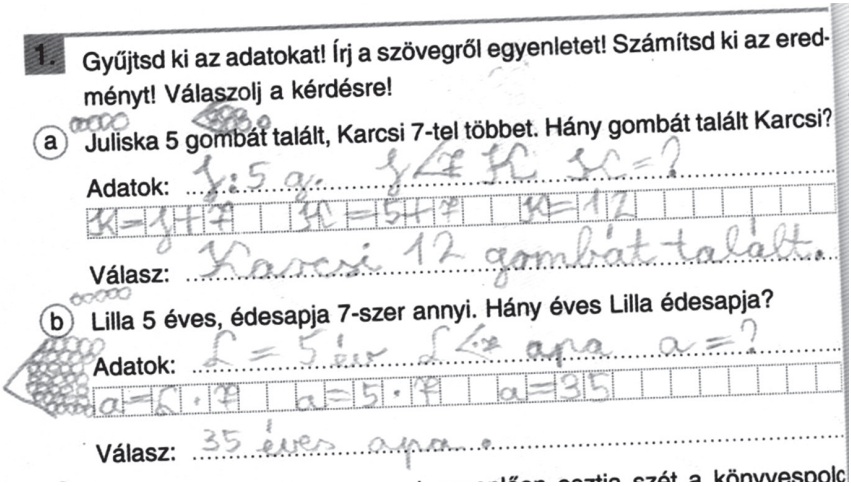
Hányszorosára változik az 1 élhosszúságú kocka térfogata, ha minden élét kétszeresére növeljük?

Egy tanító hallgatók körében végzett felmérés során a következő rossz válaszok születtek:

- *2-szeresére.* Ennek oka annak helytelen feltételezése, hogy a kocka élének hossza és a térfogata között egyenes arányosság van.
- *7-szeresére, mert 7-tel több kis kocka lesz.* Itt már a toldalékok figyelmen kívül hagyása okozza a hibát. Bár feltételezhetően helyesen állapította meg, hogy a kapott kocka 8 darab kiskockából áll, így a kiskockák száma 7-tel nőtt. A feladatot helyesen értelmezte, jól is számolt, csak a kapott eredménynek az eredeti szövegbe visszafordításánál követte el a hibát, hogy a „7-szeresére" és a „7-tel több" kifejezéseket összekeverte.
- *27-szeresére, mert a 2-vel nagyobb élű kocka 27 kis kockából áll.* Az előzőhöz hasonló hiba, csak most nem a válasz megfogalmazása során követte el a megoldó, hanem a szöveg értelmezése során, hiszen az él hosszának 2-szerese helyett a 2-vel nagyobb értékkel számolt.

Látszólag apró különbségek a szöveg értelmét teljesen megváltoztatják, a 2-vel több, a 2-szerese és a 2-szeresével több, mind mást jelent. Nem segíti a tanulók számára a különbség rögzülését, hogy egyre gyakrabban fordul elő a köznyelvben a „2-szer több" kifejezés, amelyben a toldalék szorzásra, a „több" szó pedig összeadásra utal, mégis szorzás értelemben szokták használni. Matematikailag azért is helytelen a 2-szer több kifejezés, mert negatív számok esetén a kétszerezéssel nem növeljük a számot.

Az ehhez hasonló problémák oka lehet még az a gyakorlat, amikor a feladat szövegének lejegyzésekor a relációjelbe hol az összeadás, hol a szorzás jelét írják a gyerekek. Az ábrán egy 2. osztályos tanuló érdekes rajzos próbálkozása is látható.


1. Gyűjtsd ki az adatokat! Írj a szövegről egyenletet! Számítsd ki az eredményt! Válaszolj a kérdésre!

a) Juliska 5 gombát talált, Karcsi 7-tel többet. Hány gombát talált Karcsi?

Adatok: J: 5 g. J<7 K K=?

K=J+7 K=5+7 K=12

Válasz: Karcsi 12 gombát talált.

b) Lilla 5 éves, édesapja 7-szer annyi. Hány éves Lilla édesapja?

Adatok: L = 5 év L<7 apa a=?

a=L·7 a=5·7 a=35

Válasz: 35 éves apa.

Hasonló nehézséget okoz a szövegben például a tagadószó, a feltételes mód, a birtokviszony és az időviszonyok értelmezése.

c) Valóságos tapasztalatok alkalmazása

Egy teli gyümölcsös láda tömege hatszorosa az üres láda tömegének. A teli láda 30 kg-mal nehezebb az üres ládánál. Hány kilogramm gyümölcs van a ládában? Mennyi az üres láda tömege?

Tanító hallgatók körében végzett felmérés során alig akadt olyan hallgató, aki felismerte volna, hogy a teli láda éppen a gyümölcs tömegével nehezebb az üres ládánál, így nem írták le azonnal, hogy a gyümölcs tömege 30 kg. Még akik szakaszos ábrázolással próbálkoztak, azok közül is többen az üres ládának megfelelő szakasz után rajzolták a teli ládának megfelelő szakaszokat, majd tévedésből a teli ládához rajzolták a 30-at így a 30-at 6-tal osztották. Többen a kulcsszó fordításnak megfelelően osztották 6-tal a 30 kg-ot. Érdemes volt elgondolkodni azon is, hogy vajon milyen gyümölcs lehet az, amiből 30 kg-ot lehet rakni egy ládába.

2. A szöveges feladatok tanításának problémái

A tanítás során érdemes megkülönböztetni a számtani szöveges feladatokat, amelyek egy művelettel megoldhatók, és a következtetéses szöveges feladatokat, amelyek megoldása többlépéses stratégiát igényel. A számtani szöveges feladatok megoldását nehezíti, ha a műveletek tanításakor azok algoritmusának végrehajtására koncentrálnak és a műveletek fogalma, annak konkrét szituációban való megtapasztalása, sokféle nyelvi megfogalmazása háttérbe szorul.

Különösen a következtetéses feladatok megoldását akadályozza a problémamegoldás lépéseinek helytelen értelmezése, amelynek során a tervkészítést nyitott mondat felírásával azonosítják. Alsó tagozatban ez olyan korai absztrakció, amit hiába próbálnak tanítani, nem könnyíti meg a későbbiekben a szöveges feladathoz tartozó egyenlet felírását. További gondot jelent, hogy a felírt nyitott mondatot alsó tagozatban kevés kivétellel csak próbálgatással tudják megoldani a tanulók, ami különösen folytonosan változó mennyiségeknél nem célravezető stratégia. Nyitott mondatok helyett a visszafelé gondolkodás, az ábrarajzolás, a mérleg elv stratégiáját célszerű alkalmazni addig, amíg a tanulók nem tudnak egyenleteket megoldani. A következtetést segítő stratégiák a szöveges feladatokat modellező egyenletek felírását is segíthetik, ami szintén nehézségeket szokott okozni a tanulóknak.

A következő példát a 2017-es Kalmár verseny döntőjén tűzték ki 4. osztályosoknak:

Bagoly déltől éjfélig az öreg tölgy odvában alszik, éjféltől délig pedig ébren van, és bölcs tanácsokat ad a barátainak. A következő táblát rakta ki a fára:

KÉT ÓRÁVAL EZELŐTT UGYANAZT CSINÁLTAM, MINT AMIT EGY ÓRA MÚLVA FOGOK CSINÁLNI.

Hány órán keresztül mond igazat a felirat?

Az alábbiakban látható, hogy a matematikából legügyesebb 4. osztályosok számára is milyen problémát okoz az egyenlet felírás és a diszkrét értékeken való próbálgatás stratégiája.

Egyenlet felírás:

$$x \text{ Most}$$
$$x - 2 = x + 1 \;/\; -1$$
$$x - 3 = x \quad / +x$$
$$3 = 2x \quad / :2$$
$$1{,}5 = x \quad \text{Bagoly 1,5 óráig mondhatta ezt.}$$

A közvetlen transzláció alapján próbált felírni egy egyenletet a versenyző olyan szituációra, amely nem írható le egyenlettel. A megoldás érdekében „kénytelen volt" helytelen lépést alkalmazni az egyenlet megoldása során.

„Megoldás" próbálgatással:

Igazat mond: 03:00, 04:00, 05:00, … , 10:00,
15:00, 16:00, … , 21:00, 22:00
Ez 16 óra.

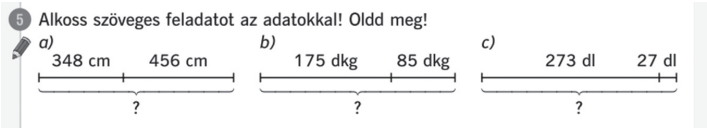
Itt a versenyző az egész időpontokon való próbálgatást átváltotta időtartamokra, miközben kihagyott órákat. A célravezető megoldás, amit néhányan megtaláltak egy 24 órás óraszámlap vagy a 24 órás időtartam szakaszként való lerajzolása, és azon a megfelelő időtartamok bejelölése volt.

3. A szöveges feladatok reprezentációi

Minden tanuló számára hasznos a teljes tanulási folyamat során az ismeretszerzés materiális, képi és szimbolikus síkjának végigjárása (Bruner, 1966). A különböző reprezentációk segítik a problémamegoldást, a problémák materiális síkon való megtapasztalása, vizualizációja az absztrakció alapja, kreatív megoldásokat inspirálhat (Vásárhelyi, Ambrus, 2007, Arcavi, 2003). Paivio és Begg (1981) kimutatta, hogy az agyban elkülönül az információ képi – konkrét és verbális – absztrakt kódolása. Ha egy információ mindkét módon kódolva van, akkor az növeli az információhoz való hozzáférés esélyét. Csíkos, Szitányi és Kelemen (2010) szöveges feladatok külső és belső reprezentációinak kölcsönhatását vizsgál-

ták 3. osztályos tanulók körében 20 órás tanítási ciklus hatására. A fejlesztő tanítási ciklus eredményes volt, a külső rajzos reprezentáció és a belső reprezentációk kialakult kapcsolatait tudatosították a tanulókban (Csíkos, Szitányi, Kelemen, 2010).

A szöveges feladatok vizuális ábrázolása leggyakrabban szakaszok rajzolásával valósul meg. Korábbi sikeres tankönyvek következetesen alkalmazták a szakaszos ábrázolást. Ehhez először bevezették a szövegeknek megfelelő szakaszokat, és a szakaszokhoz számokat rendeltek. A gyerekek megtapasztalják, hogy nagyobb mennyiséghez hosszabb szakasz tartozik, mint kisebb mennyiséghez. Ábrázolják szakaszokon mennyiségek különbségét, összegét, szakaszok alapján műveleteket írnak fel. Így a szöveges feladatoknak nemcsak a szakaszos modelljét alkotják meg, hanem a szimbolikus, művelettel felírt modelljét is. A mennyiségek nagysága alapján választanak szakaszt, továbbá a mennyiségek közötti összefüggések alapján készítenek szakaszokat. Fordítva is gyakorolják a reprezentációk változtatását, a szakaszos ábrázoláshoz alkotnak szövegeket.

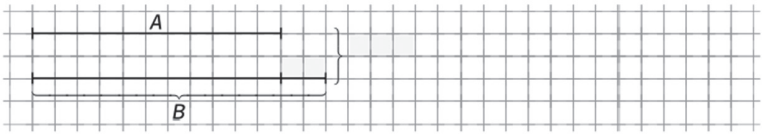


Érdemes megjegyezni a szövegek és a valóság kapcsolatát. A c) ábrához azt a szöveget írták tanító hallgatók, hogy „Nagymama 273 dl tejből süt palacsintát, amelyhez még hozzáönt 27 dl tejet. Nem vették észre, hogy ez irreálisan nagy mennyiséget jelentene, viszont megtapasztalták, hogy fontos figyelni a reális, ezután megbeszéltük, hogy ez irreálisan nagy mennyiséget jelentene, fontos figyelni a reális, megvalósítható szövegekre, amikor feladatokat készítünk.

Ez a munkafüzet az alábbi feladatsorozattal, szakaszokkal vezeti rá a tanulókat a következtetéses szöveges feladatok megoldására annak a típusfeladatnak a megoldásával, ahol két mennyiség összegéből és különbségéből kell kiszámolni az ismeretlen mennyiségeket. Ennek ellenére sokszor nehézséget okoz tanulóknak és tanító hallgatóknak egyaránt a modell felismerése, a szöveges feladatok szakaszokkal való ábrázolása.

3 *a)* Két szám összege 420, különbsége 0. Melyik ez a két szám?

b) Két szám összege 420, különbsége 10. Melyik ez a két szám?



c) Két szám összege 420, különbsége 120. Melyik ez a két szám?

d) Olgának és Zitának együtt 680 Ft-ja van. Zitának 240 Ft-tal több pénze van, mint Olgának. Hány forintjuk van külön-külön?

e) Miklós nagyszülei fokhagymát és vöröshagymát termelnek. Összesen 840 kg hagyma termett az idén, vöröshagymából 360 kg-mal több, mint fokhagymából. Hány kilogramm vöröshagyma és hány kilogramm fokhagyma termett?

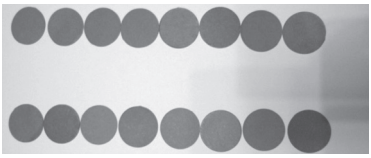
4. Materiális síkon végzett kísérlet a nehézségek áthidalására

A nehézségek leküzdésére a komplex matematikatanítási módszer alapelveinek megfelelően segítségül hívtuk az eszközhasználatot, hogy megvalósítsuk a valóságon alapuló, cselekvő tapasztalatszerzésből kiinduló tanulást.

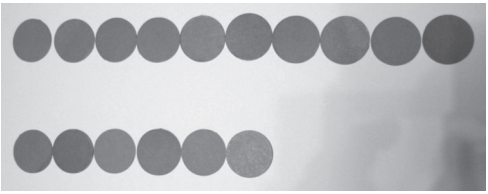
A kísérlet lényege az, hogy a szöveges feladatokban szereplő mennyiségeket reprezentáljuk előbb korongokkal, később színes rudakkal. A korongok alkalmazása speciális, kevésbé lehet elvonatkoztatni a korongok darabszámától. A színes rudak konkrét hossza lényegtelen, az alkalmazásnál csak azt figyeljük, melyik hosszabb, és az adatok közötti ismert összefüggéseknek megfelelnek-e az arányok. Az ismert hosszúságú rudakra kis papírral ráírhatjuk a hosszát, így felfedezik a gyerekek, hogy az ismeretlen hosszúságú rudak értékét hogyan lehet kiszámítani. Ez hasznosabb átmenetet jelent az ismeretlen hosszúságú szakaszok rajzolása felé, valamint később az ismeretlent szimbolizáló betűk bevezetéséhez.

1. példa: Kati és Peti együtt 16 szem epret evett. Kati 4-gyel többet evett meg, mint Peti. Hány szem epret evett meg Kati?

Szemléltessük az epreket korongokkal!



Egy lehetséges elindulás, hogy két egyenlő darabszámú kupacra osztják az epreket, majd ez egyikből átraknak valamennyit, hogy a szükséges különbség meglegyen. Tipikus hiba akár gyerekek, akár tanító hallgatók oldják meg a feladatot, hogy először 4 epret raknak át a 4 különbség eléréséhez. A materiális síkon végzett tevékenység óriási előnye, hogy saját maguk azonnal megtapasztalják, hogy hibáztak, és ki tudják javítani. Ezzel lassan felfedezik a szabályosságot, és megfogalmazzák, hogy adott különbséget egyenlő mennyiségekből a különbség felének átrakásával lehet elérni. A gyerekek ehhez a tudáshoz nem a tanár által, hanem saját tapasztalataik alapján jutottak el.



Fontos része a fejlesztésnek, hogy ne mindig ugyanaz legyen a szövegek modellje. A következő feladat az előző nehezítése, hiszen nincs megadva az összes lap száma, ez nem rakható ki egyszerűen:

2. példa: Dorka és Kata egy kupac írólapot szeretne egymás közt egyformán elosztani. Amikor megszámolták a lapokat, kiderült, hogy Dorkának 28-cal több van, mint Katának. Amikor viszont néhány lapot átadott Katának, Dorkának lett 4-gyel kevesebb lapja. Meg lehet-e mondani, hogy hány lapot adott át Dorka Katának, és hogy hány lap volt összesen?

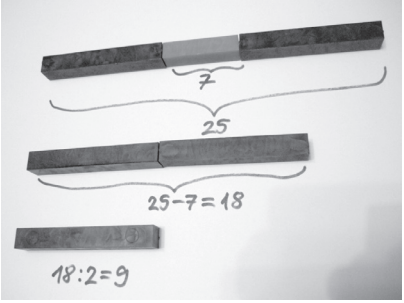
Alkalmazhatjuk az előző tudásunkat: ahhoz, ugyanannyi lapjuk legyen 28 : 2 = 14 lapot kell átadnia. Ha Dorka még egyet átad Katának már 2-vel kevesebb lapja lesz, mint Katának. Így ahhoz, hogy 4-gyel kevesebb lapja legyen, a 14-en kívül még 2 lapot, azaz összesen 16 lapot kell átadnia. A rendelkezésre álló adatokból nem lehet meghatározni, hogy hány lap volt összesen. A tanulók számára ez nagy mértékben nehezíti a megoldást.

3. példa: Kata és Vera egy Zrínyi feladatsor feladatait oldják meg együtt úgy, hogy Kati az elején kezdi, Vera pedig a végén, és sorban mindegyik feladatot megoldja valamelyikük.

Ki hány feladatot oldott meg, ha Kata 7-tel több feladatot oldott meg, mint Vera (a feladatsor 25 feladatból áll)?

Itt kellő türelemmel kirakhatjuk a 25 feladatnak megfelelő 25 korongot, ám ezt a feladatok elfelezése nélkül nem tudjuk két egyenlő részre osztani a korongokkal (ha a megoldás közben a fél korongot, fél feladatot is megengedjük, akkor a megoldás ugyanúgy működik).

A probléma megértésének első lépéseként beszéljük meg, hogy ki oldott meg kevesebb feladatot. Alkalmazzuk a színes rudakat! A gyerekek jobban átérzik, hogy a konkrét rúd hossza lényegtelen, ha azt a rudat választhatják, amelyiknek a színe a legjobban tetszik nekik. Válasszunk egy rudat, amely Vera által megoldott feladatokat jelenti, és egy másikat, ami azt mutatja, Kata mennyivel oldott meg többet. Erre kis papírral rá is ragaszthatjuk a konkrét értékét. A megoldás menete az ábrán látható. Elvesszük a többletet, így két egyforma hosszú rúd marad, amelyek együtt 25 – 7 = 18 feladatot érnek, tehát egy rúd 18 : 2 = 9-et ér. Ez Vera feladatainak száma. Ellenőrzés után válaszolunk a kérdésre.



A tapasztalatok azt mutatták, hogy az eszközhasználat célravezető, de érdemes felépíteni egy feladatsorozatot, amely egyre nehezedő problémákkal segíti a tanulókat.

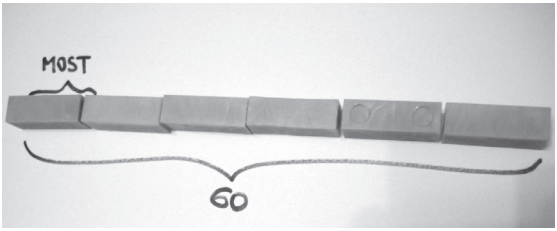
A következőkben egy olyan feladatsorozat legfontosabb lépcsőfokait mutatjuk be, ahol a modell alkotásához egy mennyiség többszöröseit kell reprezentálni. A tanítás során ezek közé a feladatok közé be lehet építeni a fent bemutatott „többletet", esetleg „hiányt". Mindegyik lépcsőfok „megmászásához" több hasonló feladat megoldása, azok ismétlése szükséges.

1. lépcső: Két mennyiség ábrázolása, egyik a másik többszöröse, adott az összegük. Ugyanezt megfogalmazhatjuk a különbség megadásával.

Érdemes megbeszélni, hogy egy szám 5-szörösének és 3-szorosának az összege a szám 8-szorosa, különbsége pedig a szám 2-szerese. Ezeket az ismereteket szerencsés esetben a szorzás tanulásakor gyakorolják a gyerekek, de ott is sikerrel alkalmazható a színes rudakkal való reprezentálás.

Ennek a típusnak nehezített szövegű változata a következő példa:

4. példa: Teknőc Teki azt mondja: „Ha még ötször annyi ideig élek, mint amennyit eddig éltem, akkor éppen 60 éves leszek. Hány éves most Teknőc Teki?



A feladatban két mennyiség időben tér el, a példa szövegét tovább nehezíti a „még annyi, mint amennyi eddig volt" kifejezés. Eszköz nélkül megoldva sokan beleestek a közvetlen transzláció hibájába, és a 60-at 5-tel osztották, hogy megkapják Teknős Teki mostani életkorát. Arra kell vigyázni, hogy ez a tévedés ne befolyásolja a kirakást, utána már nyilvánvaló a megoldás.

2. lépcső: A két mennyiség arányát törtrészekkel fogalmazzuk meg, de még egyik mennyiség a másiknak egész számú többszöröse.

5. példa: Zsófi hétfőn kiosztotta a meghívók harmadát, és így keddre 18 meghívója maradt. Hány meghívó volt eredetileg?

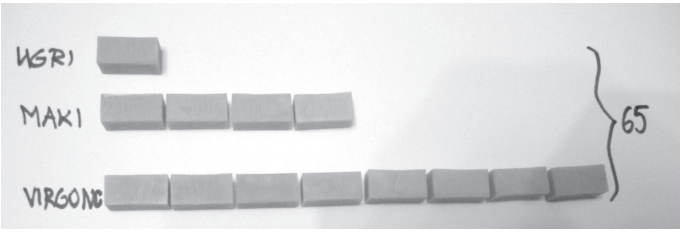
Korábban már bemutattuk a feladat hibás megoldását közvetlen transzlációval.

Érdekesség, hogy a következő példa reprezentációja nehezebbnek bizonyult az előzőnél a „18 éve" kifejezés értelmezése miatt, bár mindkettő szakaszos modellje ugyanaz.

6. példa: Móni 18 éve harmadannyi éves volt, mint most. Hány éves most Móni?

3. lépcső: Kettőnél több mennyiség viszonya szerepel a feladatban, az egyiknek többszöröse a többi.

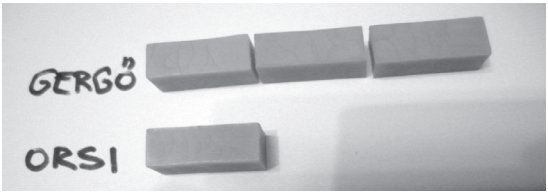
6. példa: Három mókus az összegyűjtött mogyorókat számolgatja. Maki négyszer annyit szedett, mint Ugri, de feleannyit, mint Virgonc. Ki hány mogyorót gyűjtött, ha hárman együtt 65 mogyorót szedtek?

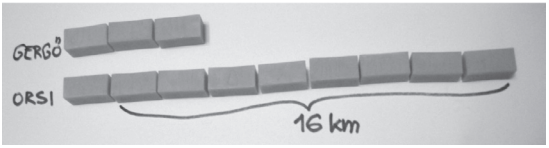


A feladat nehézsége, hogy meg kell találni azt a mennyiséget, amelyiknek a többszöröseivel a többi mennyiség kifejezhető, és utána azok sorrendjét is. Előbb a Maki által gyűjtött mogyorók számát tudjuk kirakni, majd ennek kétszereseként a Virgonc által gyűjtött mogyorók számát. További nehézséget jelent a többszöröst és a törtrészt kifejező szavak együttes alkalmazása: „négyszer annyi, feleannyi".

4. lépcső: A szöveges feladat modellje több lépésben alkotható meg, ugyanis több, időben elkülönülő szituációt tartalmaz. A feladatok nehézsége a lépések számának növelésével nő.

7. példa: Gergő és Orsi kajakedzésen eveztek. Az edzés végén megbeszélték, ki hány kilométert evezett. Gergő háromszor annyit evezett, mint Orsi. Megállapították, hogy Orsinak 16 km-rel kellett volna többet evezni ahhoz, hogy ő evezzen háromszor annyit, mint Gergő. Hány kilométert evezett Gergő?

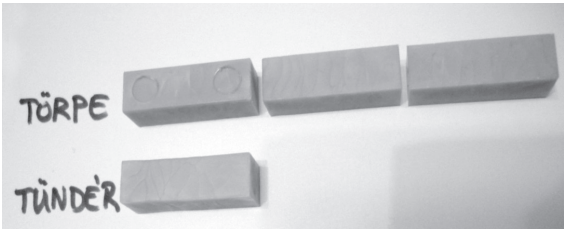




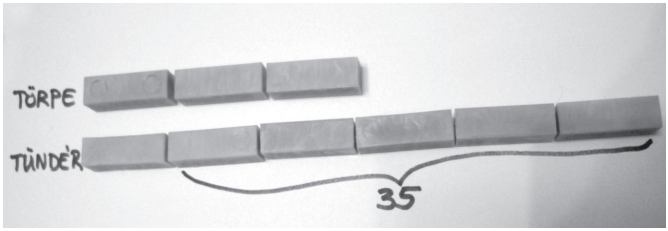
A feladatban két különböző helyzet szerepel, az elsőben azt ábrázoljuk, hogy Gergő háromszor annyit evezett, mint Orsi. A másodikban Orsi háromszor annyit evez, mint Gergő, ehhez 16 km-rel kell többet eveznie, mint az első esetben. A gyerekek számára nehézséget jelent a feltételes mód segítségével leírt két helyzet megértése, amit a rudakkal való kirakás nagymértékben segít.

5. lépcső: A több lépést visszafelé kell végrehajtani, azaz a szakaszokkal ábrázolás mellett a visszafelé gondolkodás stratégiáját is érdemes alkalmazni.

8. példa: A tündérek és törpék bálján a nyitótánc után nyolc mogorva törpe hazament. Így minden törpére két tündér jutott. Éjfélkor 35 tündér hazarepült, így minden ottmaradt tündérre három törpe jutott. Hány tündér és hány törpe kezdte a bált?



Először a történet végén kialakult állapotot rakjuk ki, majd „visszahívjuk a 35 tündért, és ezzel a tündérek száma lesz kétszerese a törpék számának.



Így azonnal megkapjuk a feladat megoldását. Külön nehézséget jelent, hogy azt, hogy a tündérek száma kétszerese a törpék számának azzal a kifejezéssel írtuk le, hogy egy törpére két tündér jutott. Ezzel a gyerekek szókincsét is bővíthetjük.

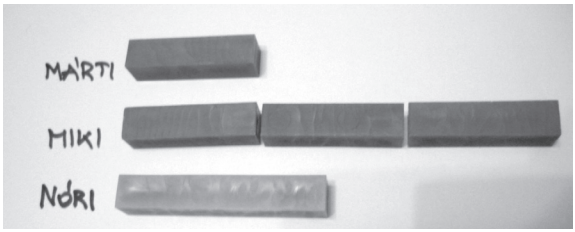
6. lépcső: Két mennyiség aránya adott, az egyik nem egész számú többszöröse a másiknak.

9. példa: A piacon 10 kg gyümölcsöt vásároltunk, almát és körtét. Az alma tömegének harmada egyenlő a körte tömegének felével. Hány kilogramm almát vettünk?

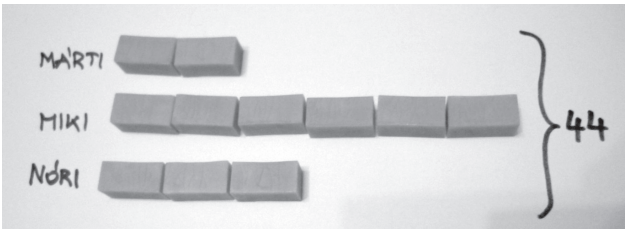
Itt az alma tömegének harmadát választva egységnek az alma 3 rúddal, a körte 2 rúddal rakható ki.

7. lépcső: A szakaszos ábrázolás, színes rudakkal való kirakás legnehezebb része, amikor az először választott rúd – egység helyett új egységet kell választani, azaz új osztópontokat kell beiktatni.

10. példa: Testnevelés órán a gyerekek kosárlabdáztak. Miki háromszor annyi pontot dobott, mint Márti. Nóri feleannyit dobott, mint Miki. Hárman együtt 44 pontot dobtak. Ki hány pontot dobott?



Márti és Miki pontjainak számát könnyen tudtuk ábrázolni, ám ahhoz, hogy Nóri pontjait is kirakjuk új rudat kellett bevetni. Ennek a hossza is összefügg az előzőekkel, amit úgy tudunk kirakni, ha az eredeti egység felét választjuk egységnek:



Ez abból is látható, hogy ha Miki pontjainak felét és harmadát is ábrázolni kell, akkor a hatodát kell bejelölni, vagyis ez lesz a megfelelő egység, aminek többszöröseként mindegyik mennyiség kirakható.

A szöveges feladatok modelljének színes rudakkal való kirakása után ezt szakaszok rajzolásával lejegyezzük.

5. Összefoglalás

A konkrét tárgyi tevékenység a 3-4. osztályos tanulók és a tanító hallgatók esetén is segítette a szöveges feladatok szakaszos ábrázolásának megtanulását. A későbbiekben kísérletet tervezünk a módszer hatékonyságának nagyobb mintán való igazolására.

A konkrét tárgyi tevékenység és a szakaszos ábrázolás segítségével olyan következtetéses szöveges feladatok is megoldhatók, amelyeket egyenlettel is csak nagy nehézségek árán sikerül a hallgatóknak amelyek egyenlettel való megoldása is sokszor nehézségeket okoz. A szöveges feladatok szakaszos ábrázolása akkor is segíti a szöveg megértését, amikor már a gyerekek ismerik az egyenleteket. A szöveges feladatok tárgyi és képi modelljének tanítása után az algebrai kifejezések, egyenletek felírását bevezethetjük úgy, hogy az egységül választott színes rúd - szakasz lesz az ismeretlen, amit egy szimbólummal jelölünk. Így minden szinten bőven megtérül a materiális és vizuális reprezentáció megalkotására fordított idő.

Végül álljon itt egy szöveges feladat és egy tanító hallgató által leírt „megoldása"!

Három gyerek együtt 20 éves. Hány évesek lesznek együtt 3 év múlva?

A válaszok között szerepelt a 60, de a 23 indoklása a legfigyelemreméltóbb:

„A 3 év megoszlik a 3 gyerek között, így mindegyik 1 évet öregszik, együtt 23 évesek lesznek". Tehát gyűljünk össze jó sokan, és nem öregszünk!

Kedves Bandi! Boldog születésnapot!!!!

Irodalom

Ambrus András (2007): A konkrét és vizuális reprezentációk használatának szükségessége az iskolai matematika oktatásban. https://drive.google.com/file/d/0B9KuvIKKTNQTbm5VWUpyS01ORkE/view

Ambrus András (2002): Nemzetközi tendenciák a matematika tanításában. Háttértanulmány az OKI Értékelési és Érettségi Vizsgaközpont részére.

Ambrus András, Vancsó Ödön (1998): Egy gyakorlatorientált modell a közoktatásban. KOMA 1998.

Arcavi, A. (2003): The role of visualrepresentationint he learning of mathematics. EducationalStudiesinMathematics 52: 215-241.

Ben Zeev (1998): Amikor a hibás matematikai gondolkodás majdnem olyan, mint a helyes: a racionális hibák. In: Sternberg, R. J. és Ben Zeev, T. (szerk.): A matematikai gondolkodás természete. Vince Kiadó, Budapest

Bruner, J. S. (1966): Towards a theory of instruction. Harvard University Press

Csíkos Csaba (2003): Matematikai szöveges feladatok megértésének problémái 10-11 éves tanulók körében. Magyar Pedagógia, 103. évf. 1. szám 35-55.

Csíkos Csaba, Szitányi Judit, Kelemen Rita (2010): Vizuális reprezentációk szerepe a matematikai problémamegoldásban. Egy 3. osztályos tanulók körében végzett fejlesztő kísérlet eredményei. Magyar Pedagógia 110. évf. 2. szám 149-166.

Haghverdi, M. (2012): Recognition of Student's DifficultiesinSolvingMathematical Word Problemsfromtheviewpoint of Teachers. 2017.05.15.

https://www.researchgate.net/publication/261548865_Recognition_of_Students%27_Difficulties_in_Solving_Mathematical_Word_Problems_from_the_Viewpoint_of_Teachers

Paivio, A.; Begg, I. (1981): Psychology of language. New Yersey, Prentice Hall.

Varga Noémi (2016): Szövegértési nehézségek a matematika-

órán. Anyanyelv-pedagógia DOI: 10.21030/aqnyp.2016.1.3.http://www.anyanyelv-pedagogia.hu/cikkek.php?id=611

Vásárhelyi Éva (2003): Problemsolvingwithhelp of combination of differentrepresentation.

Verschaffel, L.; De Corte, E. (1997): TeachingRealisticMathematicalModelingint he ElementarySchool: A TeachingExperimentWithFifthGraders. Journal for Research inMathematics EducationVol. 28. No. 5, 577-601

Vidákovich Tibor, Csapó Benő (1996): A szövegesfeladat-megoldó készségek fejlődése. Közoktatás-kutatás 1996/1997 Oktatási Minisztérium, Budapest 247-273.

Arany János:

EPILOGUS

Az életet már megjártam.
Többnyire csak gyalog jártam,
Gyalog bizon'...
Legfölebb ha omnibuszon.

Láttam sok kevély fogatot,
Fényes tengelyt, cifra bakot:
S egy a lelkem!
Soha meg se' irigyeltem.

Nem törődtem bennülővel,
Hetyke úrral, cifra nővel:
Hogy' áll orra
Az út szélin baktatóra.

Ha egy úri lócsiszárral
Találkoztam s bevert sárral:
Nem pöröltem, -
Félreálltam, letöröltem.

Hiszen az útfélen itt-ott
Egy kis virág nekem nyitott:
Azt leszedve,
Megvolt szívem minden kedve.

Az életet, ím, megjártam;
Nem azt adott, amit vártam:
Néha többet,
Kérve, kellve, kevesebbet.

Ada címet, bár nem kértem,
S több a hír-név, mint az érdem:
Nagyravágyva,
Bételt volna keblem vágya.

Kik hiúnak és kevélynek -
Tudom, boldognak is vélnek:
S boldogságot
Irígy nélkül még ki látott?

Bárha engem titkos métely
Fölemészt: az örök kétely;
S pályám bére
Égető, mint Nessus vére.

Mily temérdek munka várt még!...
Mily kevés, amit beválték
Félbe'-szerbe',
S hány reményem hagyott cserbe'!...

Az életet már megjártam;
Mit szivembe vágyva zártam,
Azt nem hozta,
Attól makacsul megfoszta.

Egy kis független nyugalmat,
Melyben a dal megfoganhat,
Kértem kérve:
S ő halasztá évrül-évre.

Csöndes fészket zöld lomb árnyán,
Hova múzsám el-elvárnám,
Mely sajátom;
Benne én és kis családom.

Munkás, vídám öregséget,
Hol, mit kezdtem, abban véget...
Ennyi volt csak;
S hogy megint ültessek, oltsak.

Most, ha adná is már, késő:
Egy nyugalom vár, a végső:
Mert hogy' szálljon,
Bár kalitja már kinyitva,
Rab madár is, szegett szárnyon?

Ambrus András 75. születésnapjára

Szilágyiné Szinger Ibolya tanítványától
Eötvös József Főiskola

Ambrus tanár urat 2003 februárjában ismertem meg a Debreceni Egyetem matematika-didaktika PhD programjának keretében. „*A matematika didaktika és kutatás módszerei*”, valamint „*A problémamegoldás elméleti alapkérdései*” című tárgyakat hallgattam nála. Ezen konzultációkon folytatott beszélgetéseink következtében az – időnként kategorikus – módszertani elképzeléseim megengedőbbé váltak.

Az első hozzáfűződő, ám meghatározó emlékem a következő volt:

Felháborodottan mondtam a tanár úrnak, hogy az óvodában a lányomnak olyan feladatot adtak, amelyben a feladatlapra rajzolt síkidomok közül a téglalapokat kellett kiszínezniük. Ezt követően a gyerekek megoldásait kitűzték a faliújságra, aminek láttán meglepődötten szembesültem azzal, hogy a gyerekek többsége csak azokat a téglalapokat színezte ki, amelyek nem voltak négyzetek. Akkor még megdöbbentőnek találtam, hogy az óvónő is ezeket a megoldásokat fogadta el helyesnek. A négyzeteket egyik gyerek sem színezte és az óvónő sem hiányolta ezeket. Ezt tapasztalván otthon igyekeztem a lányom tudomására hozni – a „fejébe verni” –, hogy a négyzetek is téglalapok, tehát azokat is ki kellett volna színeznie. Ekkor hallottam először a tanár úr reflektálásaként a geometriai gondolkodás van Hiele-féle szintjeiről, illetve arról, hogy az óvodás korú gyermekek gondolkodása még az első, az alakzatok globális megismerésének szintjén van. Ezen a szinten a gyerekek könnyen felismerik a különböző alakzatokat a formájuk alapján, de nem ismerik fel a négyzetben a téglalapot. Ez az élményem, majd a tanár úr „felvilágosítása” a témában jelentősen megváltoztatta didaktikai hozzáállásomat a matematika tanításával kapcsolatban. A doktori dolgozatom témájához is – a van Hiele szinteken keresztül – Ambrus tanár úr vezetett el.

A konferenciákon és egyéb szakmai találkozókon, beszélgetéseink során elhangzott építő kritikáival rengeteget segített abban, hogy céljaimat elérjem. Örökké hálás leszek neki ezért, köszönöm Tanár Úr!

A következő írásom – reményeim szerint – tükrözi a tanár úr szellemiségét, tanítását, melyet igyekeztem a gyakorlatban alkalmazni.

A gondolkodás fejlesztésének lehetőségei dominóval

A matematikatanítás fejlesztő feladati közül a legfontosabb a gondolkodásfejlesztés. A gyermeki gondolkodás a valóságból szerzett tapasztalatokra épít, továbbá ezek rendszerezését, kapcsolatainak felismerését biztosítja. A gondolkodást a különböző problémahelyzetek keltik életre, mégpedig úgy, hogy a megszerzett tapasztalatokat, ismereteket mozgásba hozzák a probléma megoldása érdekében. A gyermek gondolkodásának fejlődése a tárgyakkal való manipulációtól a gondolati tevékenység felé haladó folyamat. (Perlai, 1990)

Jean Piaget (1997) a gyermek értelmi fejlődését szakaszokra bontja, melyek alapján az alsó tagozatos gyermek gondolkodása konkrét műveletekben folyik. A cselekvésbe ágyazott gondolkodást felváltja a képzetek alapján lejátszódó gondolkodás. A gyermek gondolkodása még kapcsolódik a konkrét tárgyakhoz vagy ezek manipulációjához, de már képes elképzelni konkrét tárgyakkal való tevékenységeket is, melyek nincsenek a környezetében. A gyerek egyszerű verbális állítások segítségével – tárgyakkal történő manipuláció nélkül – képtelen gondolkodni, tiszta nyelvi síkon következtetéseket levonni. A tanító feladata a gyermek gondolkodásának a konkrét műveletekben való kiteljesítése, a hipotetikus-deduktív gondolkodás megközelítése.

Bruner (1974) szerint minden gondolkodási folyamat három különböző síkon mehet végbe, az ismereteknek, a tudásnak háromféle reprezentációs módja létezik:

- *materiális* (enaktív) sík:

Az ismeretszerzés konkrét tárgyi tevékenységek, cselekvések, manipulációk révén megy végbe.

• *ikonikus sík:*

Az ismeretszerzés szemléletes, összegző képek, illetve elképzelt szituációk segítségével történik.

• *szimbolikus sík:*

Az ismeretszerzés matematikai szimbólumok és a nyelv segítségével megy végbe.

Ez a három reprezentációs mód az oktatási folyamat minden fázisában szerepet játszik. A cselekvések, képek és szimbólumok más-más nehézséggel járnak, így másképpen hasznosak a különböző életkorokban. Bár az alsóbb osztályokban az enaktív és az ikonikus reprezentáció dominál, mindemellett a nyelv (beszéd) is fontos szerepet játszik, amely szimbolikus síkot jelent. Az első két szakasz megkerülése azt a veszélyt hordozza magában, hogy a tanuló a megfelelő képzetrendszer hiánya miatt a szimbolikus síkon nem képes matematikai problémákat megoldani, fogalmakat megérteni, mert nincs mire támaszkodnia. (Ambrus, 1995)

A Bruner-féle reprezentációs síkok a gyermek fejlődése során három egymásra épülő szintet jelent. Ezeket a szinteket helytelen volna életkori szakaszokhoz kötni. Arról van szó inkább, hogy a tudás különböző területein különböző időkben járjuk végig ezt az utat. Az iskolai oktatás sokszor azért nem sikeres, mert a tanulók fogalmi fejlődése az adott tudásterületen még nem járta végig a Bruner által felvázolt utat a cselekvéstől a vizualitáson át az elvont fogalmakig. (Knausz, 2001)

A világhírű magyar matematika-didaktikusok közül *Pólya Györgyöt* (2000) emelném ki, akit a heurisztika (egy kutatási ág, amely a feladatmegoldás folyamatát tárja fel) atyjának neveznek. Hogyan oldjunk meg feladatokat? Erre a kérdésre „A gondolkodás iskolája" című könyvében találhatjuk meg a választ.

A *Pólya-féle* problémamegoldási fázisok a következők:

I. A FELADAT MEGÉRTÉSE

- Mit keresünk? Mi van adva? Mit kötünk ki?
- Rajzolj ábrát! Vezess be alkalmas jelölést!

II. TERVKÉSZÍTÉS

- Nem találkoztál már a feladattal? Esetleg a mostanitól kicsit eltérő formában?
- Nem ismersz valami rokon feladatot? Vagy olyan tételt, aminek hasznát vehetnéd?
- Nézzük csak az ismeretlent! Próbálj visszaemlékezni valami ismert feladatra, amelyben ugyanez – vagy ehhez hasonló – az ismeretlen.
- Itt van egy már megoldott rokon feladat. Nem tudnád hasznosítani? Nem tudnád felhasználni az eredményét? Nem tudnád felhasználni a módszerét?
- Nem tudnád átfogalmazni a feladatot?
- Nem tudnád megoldani legalább a feladat egy részét?

III. TERVÜNK VÉGREHAJTÁSA

- Ellenőrizz minden lépést, amikor végrehajtod a tervedet!

IV. A MEGOLDÁS VIZSGÁLATA

- Nem tudnád ellenőrizni az eredményt?
- Nem tudnád másképpen is levezetni az eredményt?

Kiss Tihamér a Pólya-féle problémamegoldási fázisokat a következőképpen értelmezi kisgyermekek vonatkozásában: „Egy feladat sikeres megoldásához az vezeti a gyermeket, hogy elemzi az adott feladathelyzetet, és megértve a problémát, fontolgatja, hogy eddigi tapasztalatai során milyen eljárás vezeti megoldáshoz; próbálkozik vele. Ha újfajta feladathelyzet előtt áll, és az eddig bevált módszerek közt nem talál megfelelőt, vagyis nem következhet be az alkalmazkodás egyszerű asszimilációval, akkor akkomodáló tevékenységeket kell kitalálnia, ezek feltehető felhasználásával hipotézist alkothat, és megkísérli a megoldáshoz vezető, újonnan szerkesztett műveleti sémákkal a végrehajtást. Ha ez sikerrel jár, a felfedezés öröme hasonló feladatok megoldására motiválja, így gyakorlással új eljárásmódja megszilárdul. Egy ilyen ismétlődő, sikeres tevékenység bátorrá teszi a vállalkozásokban, önbizalmát fejleszti, megkedveli a tantárgyat." A gyermek megismerő, feladatmegértő és -megoldó tevékenységét felgyorsítja, ha a pedagógus olyan új feladathelyzetek elé állítja, amelyek az életkori sajátosságainak, az éppen adott problémahely-

zetben értelmi fejlettségi szintjének megfelelnek, továbbá az előzetes tapasztalataira épülnek. (Kiss, 2001) A pedagógus tapintatosan figyelheti, segítheti a gyermekek problémamegoldási folyamatát, dialógust folytathat vele, ha helyes lépést tesz, helyeselheti, amennyiben téved, úgy újabb megfontolásra biztathatja, ezen túlmenően segítő kérdéseket tehet fel, szükség esetén tanácsokat adhat vagy ötleteket kínálhat fel. (Szendrei, 2005) A pedagógus képzelje magát a diák helyébe, élje bele magát gondolkodásmódjába, próbálja megérteni, mi megy végbe a diák fejében, majd minden esetben igyekezzen olyan kérdéseket feltenni, illetve olyan lépéseket javasolni, amelyek a diáknak magának is eszébe juthattak volna. (Pólya, 2000)

A gondolkodás fejlődésének egyik lényeges eleme a fogalomalkotás. Az általános iskola alsó tagozatán a matematika alapvető fogalmainak – köztük számfogalom, műveletfogalom, számelméleti alapfogalmak, a geometria alapvető fogalmainak – alapozása történik. A matematikai fogalmak fejlődése hosszú folyamat, az első négy évfolyamon nem zárul le, más tanulási szinteken folytatódik tovább. A fogalmak, összefüggések érlelése egyre emelkedő szintű spirális felépítést indokol. A fogalmak kialakításánál a gyerekek életkorának megfelelő tényleges cselekvésekből indulunk ki. Manuális, konkrét tárgyi tevékenységek szükségesek a fogalmak kellően változatos, gazdag tartalmának megismeréséhez.

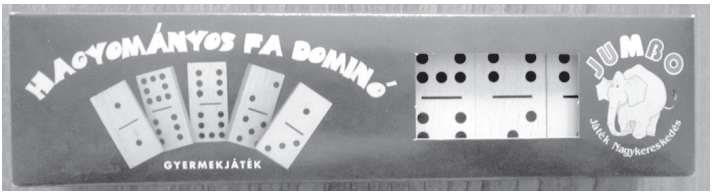
Shlomo Vinner és *David Tall* (1981) vezették be a fogalomképzet (concept image) elnevezést a matematika-didaktika szakirodalomba. „A fogalomképzet a fogalom nevéhez kapcsolódó teljes kognitív struktúrát jelenti, amely magában foglalja mind a mentális képeket, mind pedig az ezzel összekapcsolt tulajdonságokat, folyamatokat, képeket, ábrákat és tapasztalatokat." (Tall, 2004) A konkrét tárgyi és képi reprezentációk segítik a fogalom mentális képének létrehozását, amely nem egyszerű másolata a külső reprezentációnak, hiszen az egyén konstruktív aktivitása révén jön létre és függ az egyén tapasztalataitól, tudásától. A képek, konkrét példák és tapasztalatok jelentős szerepet játszanak a sokoldalú fogalomképzet kialakításában.

A gondolkodás fejlődését sokféle érdekes, játékos szituáció, feladat vagy problémahelyzet teremtésével segíthetjük elő, amelyek

kereső, felfedező és alkotó tevékenységre ösztönöznek. A gondolkodásfejlesztő feladatainkat minden esetben a gyermek gondolkodási szintje, műveletisége határozza meg.

A gondolkodás fejlesztésére egy kiváló eszköz a dominó *(1. ábra)*. Sokoldalú használatának eredménye az analóg és a divergens gondolkodás látványos fejlődése.

(Hegedűs Gábor, 2014)



1. ábra

A dominó használata segít:

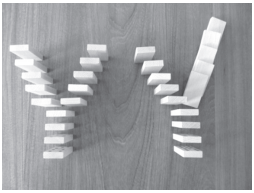
- a gondolkodás fejlesztésében,
- a számokkal való ismerkedésben, számfogalom fejlesztésében,
- a műveletfogalom fejlesztésében,
- a sík- és térszemlélet fejlesztésében,
- a terület- és kerületfogalom fejlesztésében,
- a kombinatorikai problémák megoldásában,
- a sorozatok alkotásában, szemléltetésében,
- a relációfogalom fejlesztésében.

Kisgyermekeknél a konkrét tárgyi tevékenység, a mozgás, a pakolgatás, az alkotás lehetősége elfeledteti velük, hogy matematikai fejlesztés részesei, játékként élik meg az eszköz használatát.

Feladatok számokkal való ismerkedésre, szám- és műveletfogalom fejlesztésére, alapműveletek gyakorlására:

- a klasszikus dominó játék (mely segíti a globális számfelismerést),
- a dominón lévő pöttyök számlálása,
- számok kéttagú bontásának szemléltetése (ehhez 2 készlet szükséges), leolvasása,
- a dominón lévő pöttyök számának meghatározása két szám összegeként,

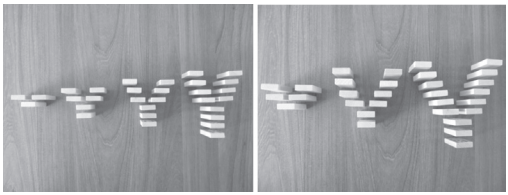
- „vonat” létrehozásánál többtagú összeadás végezhető,
- dominók keresése különböző feltételek szerint, így pl: Egyik részben legyen kettővel (hárommal) több (kevesebb) pötty, mint a másik részben. Mindkét részben legyen ugyanannyi pötty stb.,
- a dominó két négyzetében lévő pöttyök különbségének meghatározása,
- összeadással, kivonással kapcsolatos szöveges feladatok megoldása: pl: 14 dominóból alkossunk ”Y” alakzatot! A 14 dominóból 5 eldőlt *(2. ábra),* mennyi maradt állva? (Játsszuk is el!)



2. ábra

Úgy döntsük el a dominókat, hogy 11 maradjon állva! Mennyit kell eldönteni?

- oszthatósággal kapcsolatos szöveges feladatok megoldása: pl: Úgy alkossunk „Y” alakzatot, hogy a lábban lévő dominók száma fele legyen a szárakban lévő dominók (a/ feladat), vagy az egy szárban lévő dominók számának (b/ feladat)! *(3. ábra)*

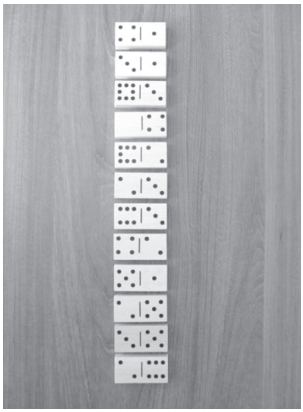


a) feladat *b) feladat*

3. ábra

- bűvös alakzatokat rejtő feladatok megoldása:

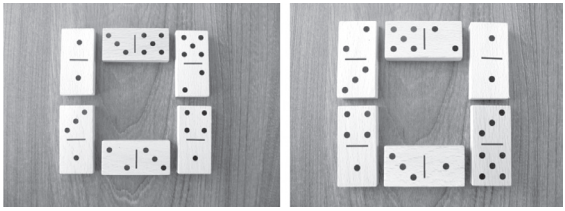
1. Hogyan tudod egyenlővé tenni a bal és a jobb oszlop értékét a következő kirakásban egyetlen dominó megfordításával? És két dominó megfordításával? *(4. ábra)* (A dominók kirakásával ellenőrizd megoldásaid!)



4. ábra

2. Rendezd át a képen látható dominókat ugyanabban az alakzatban úgy, hogy a pöttyök száma vízszintesen is 10-10, és függőlegesen is 10-10 legyen! *(5. ábra)*

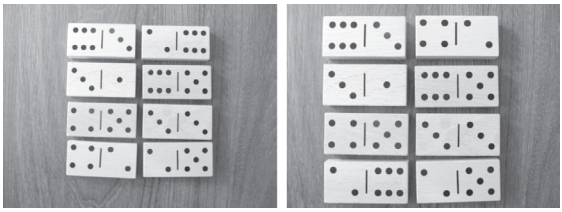
Megoldás:



5. ábra

3. A képen lévő dominók közül cserélj meg kettőt úgy, hogy a pontszámok összege valamennyi vízszintes és függőleges sorban egyformán 15-15 legyen! *(6. ábra)*

Megoldás:

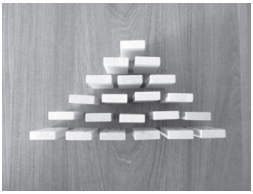


6. ábra

Kombinatorikai feladatok megoldása során az alsó tagozat 1-2. osztályában a lehetséges eseteket előállítani (kirakással, színezéssel stb.) és egyszerűen megszámlálni ezeket könnyebb, mint ügyesen, valamilyen rendben összeszámlálni 3-4. osztályban, mert ehhez olykor sokat kell gondolkodni, mégis így többre jutunk. Ez az út vezet a kombinatorikus gondolkodás fejlesztéséhez.

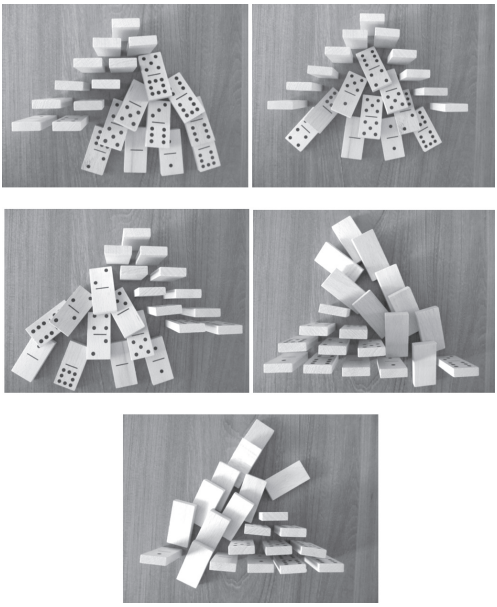
Feladatok kombinatorikai problémák megoldására:

1. Hányféleképpen lehet indítani a dominódöntést úgy, hogy egyetlen indítással 10 dominó dőljön el? *(7. ábra)*



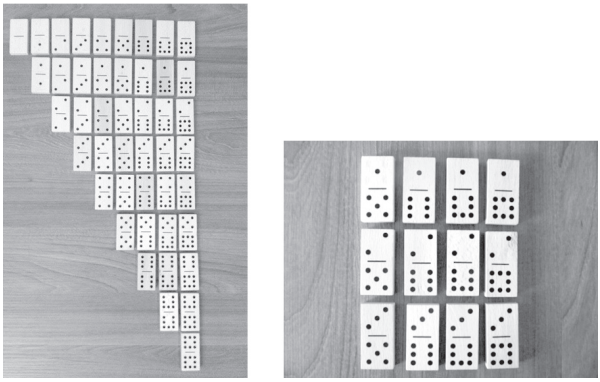
7. ábra

Megoldás: 5-féleképpen *(8. ábra)*



8. ábra

2. Hányféleképpen juthatok el az (1,5)-ös dominótól a (3,8)-as dominóhoz, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük? *(9. ábra)*



9. ábra

Analóg feladat: Hányféleképpen olvashatjuk ki a GEMENC szót a következő táblázatból, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

GEME
EMEN
MENC

Megoldás: 10-féleképpen.

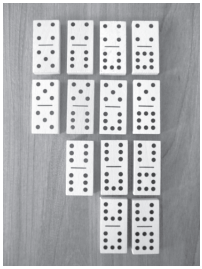
3. Hányféleképpen juthatok el az (1,5)-ös dominótól a (3,8)-as dominóhoz a (2,6)-os dominó érintésével, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük? *(9. ábra)*

Analóg feladat: Hányféleképpen olvashatjuk ki a GEMENC szót a következő táblázatból a 2. sor 2. betűjének (M) érintésével, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

GEME
EMEN
MENC

Megoldás: 6-féleképpen.

4. Hányféleképpen juthatok el az (4,5)-ös dominótól a (7,8)-as dominóhoz, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük? *(10. ábra)*



10. ábra

Analóg feladat: Hányféleképpen olvashatjuk ki az OLIMPIA szót a következő táblázatból, ha az egyes lépéseket csak jobbra vagy lefelé tehetjük?

OLIM
LIMP
MPI
IA

Megoldás: 14-féleképpen.

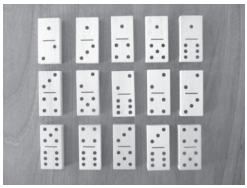
5. Állítsuk össze egy 6 csapatos bajnokság fordulóit! (Mindegyik csapat mindegyik csapattal játszik.)

Hány forduló lesz?

Hány meccs lesz?

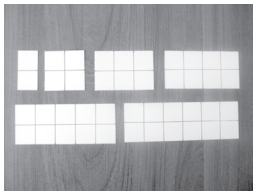
Megoldás: 5 forduló, 15 meccs, 1. forduló:1. és 2., 3. és 4., 5. és 6. csapat; 2. forduló:1. és 3., 2. és 5., 4. és 6. csapat; 3. forduló:1. és 4., 2. és 6., 3. és 5. csapat; 4. forduló:1. és 5., 2. és 4., 3. és 6. csapat; 5. forduló:1. és 6., 2. és 3., 4. és 5. csapat

Megjegyzés: A hatos dominó készlettel jól lehet modellezni a problémát *(11. ábra)*. A csapatokat a négyzetek pötty számai jelöljék!(Ahol az egyik négyzetben 0 pötty van, azokkal nem dolgozunk, illetve, ahol azonos számú pötty van mindkét részben.)



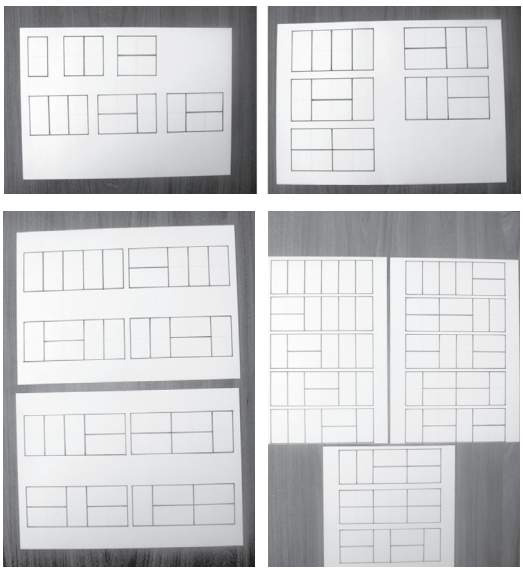
11. ábra

6. Hányféleképpen fedhetünk le egy 2x1-es, 2x2-es, 2x3-as, 2x4-es, 2x5-ös, illetve egy 2x6-os méretű táblát dominókkal? *(12. ábra)*



12. ábra

Megoldás: A lehetőségek számát rendre a Fibonacci-sorozat tagjai adják: 1, 2, 3, 5, 8, 13. *(13. ábra)*

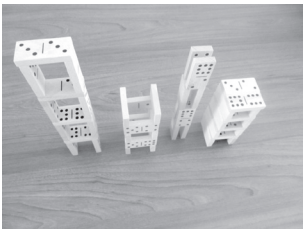


13. ábra

Feladatok a térszemlélet fejlesztésére:

- Különböző építések: toronyépítés, házépítés, lépcsőépítés, szabad építések, „vonat" létrehozása.

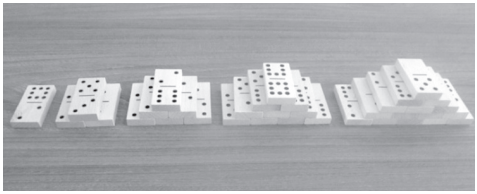
A *relációfogalom fejlesztésére* irányuló kérdések és utasítások ehhez kapcsolódóan: Melyik torony (ház) a magasabb, illetve alacsonyabb? *(14. ábra)* Melyik vonat hosszabb, illetve rövidebb? Építs ugyanolyan magas tornyot, mint…! Építs két szinttel magasabb (alacsonyabb) tornyot az előzőnél! stb.



14. ábra

Feladatok sorozatok alkotására, szemléltetésére:

1. Hány dominóból áll az egyes tornyoknál 1 szint, 2 szint, 3 szint, 4 szint, … , 10 szint? *(14. ábra)*
2. Hány dominóból állnak az egyes lépcsők? A 10. és a 20. lépcső hány dominóból áll? *(15. ábra)*

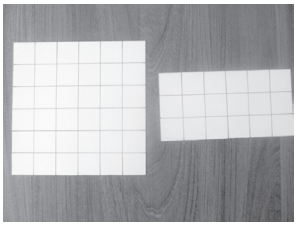


15. ábra

Megoldás: Az első lépcső 1, a második lépcső 1+2=3, a harmadik 1+2+3=6, … , a tizedik 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=11·5=55, a huszadik lépcső 1+2+…+19+20=21·10=210 dominóból áll.

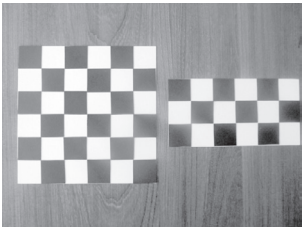
Feladatok a területfogalom fejlesztésére:

1. Lefedhető-e dominókkal egy 6x6-os, illetve egy 3x6-os tábla? *(16. ábra)*



16. ábra

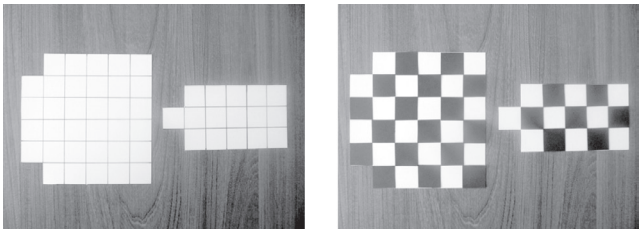
Megjegyzés: A sakktáblaszerű színezés segít a feladat megoldásában. *(17. ábra)* Egy dominó egy sötét és egy fehér mezőt fed le.



17. ábra

Megoldás: Igen, mindegyik lefedhető. A 6x6-os tábla 18 sötét és 18 fehér, a 3x6-os pedig 9 sötét és 9 fehér mezőből áll.

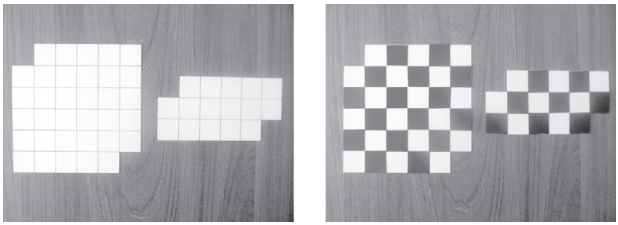
2. Lefedhetők-e dominókkal a következő táblák? *(18. ábra)* Miért?



18. ábra

Megoldás: A 17 sötét és 17 fehér mezőből álló tábla lefedhető, a 7 sötét és 9 fehér mezőből álló pedig nem.

3. Lefedhetők-e dominókkal a következő táblák? *(19. ábra)* Miért?



19. ábra

Megoldás: A 16 sötét és 18 fehér mezőből álló tábla nem, de a 8 sötét és 8 fehér mezőből álló lefedhető.

Zárásként Pólya György tanácsai közül kiemelünk egyet, mégpedig azt, miszerint a fejlesztés legfontosabb része a már megoldott feladattal, problémával való „bíbelődés", visszapillantás a befejezett munkára. A már megoldott problémával való további munka nagy szellemi erőfeszítést igényel a gyerekektől, így ezt a tevékenységet eleinte érdemes minél rövidebbre fogni és csak fokozatosan emelni az idejét. A befektetett idő mégis busásan megtérül, ezen túlmenően elengedhetetlen feltétele a fejlesztésnek. A megoldásokban való elmélyedés eredményezheti azt, hogy rendezett, alkalmazható tudásra teszünk szert. (Pólya, 2000, Szendrei, 2005)

Irodalom

1. Ambrus András: Bevezetés a matematikadidaktikába. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 1995, 35-40, 40-49.
2. Andrásfai Béla: Versenymatek gyerekeknek. Tankönyvkiadó, Budapest, 1986, 46-47.
3. Bruner, Jerome S.: Új utak az oktatás elméletéhez. Gondolat, Budapest, 1974, 13-40.
4. Hegedűs Gábor Imre: Csodavilág otthon, óvodában, iskolában, Barkácskuckó-sorozat 1. füzet, Hegedűs-féle dominóterápia, Reálstúdió Bt., Kecskemét, 2014, 4-35, 39-40.
5. Kiss Tihamér: A matematikai gondolkodás fejlesztése hétéves korig. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2001, 8.

6. Knausz Imre: A tanítás mestersége. Egyetemi jegyzet, Miskolc-Budapest, 2001, 11-13.
7. Peller József: A matematikai ismeretszerzési folyamatról. ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2003, 39-41.
8. Perlai Rezsőné: Matematikai nevelés – gondolkodásfejlesztés az óvodában. Magyar Pedagógiai Társaság Kisgyermeknevelési Szakosztály, 1990, 17-22.
9. Piaget, Jean: Az értelem pszichológiája. Kairosz Kiadó, 1997, 167-215.
10. Pólya György: A gondolkodás iskolája. Akkord Kiadó, Budapest, 2000, 13-43.
11. Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Typotex Kiadó, Budapest, 2005, 130-131.
12. Tall, David: The Mathematical Growth. http://davidtall.com, 2004.
13. Tall, D. – Vinner, S.: Concept image and Concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. Educational Studies in Mathematics, 12, 1981, 151-169.

Tarcsi Margit

Debreceni Hittudományi Egyetem

„Mindennek rendelt ideje van,
és ideje van minden dolognak az ég alatt.
Ideje van a születésnek és ideje a meghalásnak;
ideje az ültetésnek, ideje annak
kiszaggatásának, a mi ültettetett. …”
Salamon: Prédikátorok Könyve 3:1-8

Hálás szívvel gondolok dr. Ambrus András egyetemi docensre, aki tevékenyen részt vett a Debreceni Egyetem Matematika Doktori Iskolája Didaktika alprogramjában. Óriási tapasztalatával nagyban segítette a doktoranduszok munkáját. Sok cikket – főleg angol nyelvűt – olvastatott el velünk, mielőtt cikkírásba kezdtünk. Első próbálkozásainkat nagy odafigyeléssel olvasta át, véleményezte, javította. Széleskörű olvasottsága segítette abban, hogy mindenkinek tudjon irodalmakat ajánlani. Törekedett arra, hogy senkinek ne vegye el a kedvét a munkától. Nagyon sok PhD hallgatót – köztük engem is – segített át a nehézségeken. Tisztelettel és szeretettel emlékezek vissza a közös gondolkodásainkra.

Hány óra van?

Az időmérés és az időmértékegységek ismereti szintjének vizsgálata

Absztrakt: Egy mérés alapján vizsgáljuk, hogy vajon az időméréssel kapcsolatos feladatokat milyen szinten oldják meg a gyerekek. A mérőlapot úgy szerkesztettük meg, hogy átfogó képet kapjunk a gyerekek ismereteiről ebben a témában. Kíváncsiak voltunk, hogy a hétköznapi és tudományos fogalmakat milyen szinten tudják ösz-

szekapcsolni. Erre igencsak jó lehetőséget biztosítanak az időmértékegységek, hiszen egyrészt itt a legváltozatosabbak a váltószámok, s ezekkel a fogalmakkal nap mint nap szembesülhet mindenki.

Bevezetés

Az időméréssel sokkal többet találkozunk, foglalkozunk a hétköznapi életben, mint a többi méréssel. A gyerekeknek már óvodás korban *korán* kell kelni, hogy időre beérjenek az óvodába. A szülők csak a munka befejezése *után* tudnak értük menni. Tehát már ekkor találkoznak az időpont és az időtartam fogalmával, még ha nem is érzik a kettő közötti különbséget. Az is zavarja a kisgyereket, hogy az *óra*nak két jelentése van, mint mérőeszköz, és mint mértékegység. Aztán az iskolában már *órarendje* van a gyereknek, szembesül azzal a ténnyel, hogy egy *matematika óra* nem olyan hosszú, mint egy óra. Egyszerre mondunk a gyereknek időpontot és időtartamot, pl. Tizenöt percre van tőlünk az iskola, ezért el kell indulni fél nyolckor itthonról, hogy beérjünk háromnegyed nyolcra. Mennyi különböző fogalmat sűrítünk bele egy mondatba. Az ilyenfajta mondatokat addig mondogatjuk, amíg a gyerek meg nem tanulja, de érti-e?

Az időérzék kialakulását nagyban befolyásolja az is, hogy a hosszúságmérés egységeként is használják az időmértékegységeket. Például, ha megkérdezzük a gyerekeket, hogy milyen messze laknak a nagymamától az esetek többségében időmértékkel válaszolnak, pl. 10 percre, 30 percre . Ezeket a kifejezéseket már akkor is használják, amikor a perceket még nem is tanulják. A mesékben is gyakran előfordulnak az „egynapi, háromnapi járóföld" kifejezések. Ebben a témakörben a hétköznapi fogalmak ismeretében – még ha nincsenek is megtöltve tartalommal – előrébb járnak a gyerekek, mint a tudományos fogalmakéban.

A tudományos fogalmak hamarabb alakulnak ki, rendeződnek, szerveződnek egységgé, mint a hétköznapi fogalmak. „a tudományos fogalmak fejlődése megelőzi a spontán fogalmak fejlődését." (Vigotszkij, 2000). A tudományos fogalmak fejlődésének útja so-

rán „elsődleges a verbális meghatározás, amely szervezett rendszer körülményei között leszáll a konkrétig, míg a köznapi fogalmak fejlődési tendenciája meghatározott rendszeren kívül megy végbe – alulról felfelé az általánosítások felé" (Vigotszkij 2000). A köznapi és tudományos fogalmak fejlődése ellentététes irányba halad, de szoros, bensőséges kapcsolatban vannak egymással. A köznapi fogalom fejlődésének el kell érni egy bizonyos szintre, hogy képes legyen a tudományos fogalmak befogadására, de a köznapi fogalmak fejlődése is függ a tudományos fogalmak alakulásától, ugyanis ezek a fogalmak felfelé a tudományos fogalmakon keresztül terjeszkednek. A tudományos fogalmak átalakítják, és magasabb szintre emelik a hétköznapi fogalmakat.

Az időmérés során az idő hétköznapi és a tudományos fogalmát kívánjuk egyre közelebb hozni egymáshoz. Olyan tevékenységeket, feladatokat kapnak a gyerekek, amelyek kapcsolódnak a mindennapi tapasztalatukhoz, s a mindennapi életben tapasztaltakat felhasználjuk a tanítás során a fogalmak épüléséhez.

Véleményünk szerint az időmérés tanításánál is kettős úton kellene haladni. Egyrészt a méréseknek, a mértékegységek bevezetésének egyfajta történetiséget kellene követni, másrészt ezzel párhuzamosan is, de ezt megelőzően is többet kellene foglalkozni a különféle óratípusokkal. A digitális órán, az arab számokkal és a római számokkal jelzett óralapon több időpontot kellene beállítani, s az adott időpontokat többféleképpen leolvasni.

A témakörnek a tanítását az is nehezíti, hogy több tantárgyban is előfordulnak ezek az ismeretek.

Az időmérés történeti áttekintése, eszközei és módja

Mérések az élet számos területén, a különböző tudományágakban, így a matematikában is megjelennek. Az egyes mennyiségek méréséhez kapcsolódó egységek, a szabványmértékegységek kialakulása hosszú folyamat eredménye.

Objektív folyamatok egymásutánjának és tartamának a mérésre az időt használjuk. Időmértékek meghatározásához csak olyan

folyamatok alkalmasak, amelyek periodikusak, és változatlan sebességgel folynak le. Hosszú időn át megfelelő időmértékegységnek számított a Földnek a tengelye körüli forgása. Amikor azonban az atomórákkal végzett mérések során kiderült, hogy ez a forgás egyenetlen, a Földnek a Nap körüli keringését választották a törvényes időmérték alapjául.

A régi klasszikus korban az időt még az emberi árnyék irányából és hosszúságából határozták meg. A mai igények a percnyi pontosságot követelik meg a mindennapi életben is. Az időmérés nemcsak tudományos vonatkozásban, hanem a mindennapi életben is alapvető fontosságú. Érthető tehát minden kornak az a törekvése, hogy az időmérést mennél tökéletesebbé tegye.

Már az ősidőktől a napot tartották fontos időmérési „eszköznek". Régebben nem azt mondták, hogy délután háromkor, reggel négykor stb., hanem napnyugatkor, napkeltekor, szürkületkor stb. A legegyszerűbb megoldásnak mutatkozott „lelépni az időt".

Amikor az időt napokban mérjük a Föld tengelyforgására utalunk. Egy nap az az idő, ami alatt a bolygónk egy teljes fordulatot tesz saját tengelye körül.

A nap 24 órás tartama középérték, mert a valódi nap változó hosszúságú, a Föld a Nap közelében gyorsabban mozog, mint amikor távolabb van tőle. Az időmérés standard nagyságának ezért a „fiktív Középnapot" vették, ez pedig mindig egyformán 24 óra.

Azt az időtartamot, amely alatt a Föld látszólag teljesen megkerüli az égboltot, évnek nevezzük.

A naphoz hasonlóan az év is eltérően határozható meg, attól függően, hogy az égbolton milyen vonatkozási pontot használunk.

Az év meghatározásában azt az időt vesszük alapul, amely a Nap látszólagos mozgása során egy csillaggal vagy más égi vonatkozási ponttal két egymást követő együttállás között eltelik.

Együttállásról akkor beszélünk, amikor a Föld a Nap és egy harmadik égitest egy egyenesen fekszik.

Ha vonatkozási pontnak egy állócsillagot veszünk, sziderikus évet mérünk. Ennek tartama 365 nap, 6 óra, 9 perc, 10 másodperc. Ez az az időtartam, amelyre a Földnek valóban szüksége van ahhoz, hogy egyszer megkerülje a Napot.

Az időszámításunk alapja a tropikus év, az az időtartam, amely a Napnak a tavaszponton való két egymás utáni áthaladása között eltelik. Ez az idő. 365 nap, 5 óra, 48 perc, 46 másodperc.

(Természettudományi kisenciklopédia, Gondolat 1975)

Mindennapi életünkben az idő az események látszólag folyamatos sorrendjének érzékelésére utal. A szubjektív idő, az egyén belső időészlelése eseményekhez, történésekhez kötődik. Ez az idő sohasem egyformán telik, tartama függ az életkortól és főként az események személyes jelentőségétől, körülményeitől. Az idő nem látható, érzékszervekkel nem érzékelhető.

Az idő mérésének jelenlegi rendszere a sumér civilizációig nyúlik vissza. E mérési rendszer a megszokott tízes alap helyett hatvanas alapot használ: egy perc 60 másodperc, egy óra 60 perc, valamint 360 nap (60×6) van egy évben (néhánnyal kiegészítve). E számrendszerben a 12 is jelentős szám: a napnak 12 nappali és 12 éjszakai órája van (régen a napnyugta jelezte a nap végét) és 12 hónap van egy évben.

Az idők során meglehetősen sokféle időmérési eszközt készítettek. A napóra, amihez egy álló pálcát használtak, melynek árnyéka órára kalibrált beosztásokra vetült. Ez az eszköz mindig a helyi időt mutatja.

Az ókor legpontosabb időmérési eszközei az először Egyiptomban használt vízórák voltak. A vízórák használatosak voltak Alexandriában is, s onnan terjedtek el világszerte. Előnyük az volt a napórákkal ellentétben, hogy éjszaka is mutatták az időt. A homokóra homokszemek folyását használja az idő múlásának mérésére. A középkor apátságaiban, kolostoraiban és zárkáiban világszerte gyertyákat, tömjénfüstölő pálcákat használtak, ezek mutatták az idő múlását. Hétköznapjainkban az egy napnál rövidebb idő általánosan használt időmérő eszköze az óra. Az órákat hajthatják rugóval, gravitációval, elektromos árammal és sokféle ingával szabályozhatják.

Az idő SI-alapegysége a másodperc. Az ebből származó nagyobb időegységek, mint perc, óra és nap, nem SI-egységek, mert egyrészt nem tízes számrendszerűek, másrészt szükség van egy időnkénti „szökőmásodperc”-re, mégis hivatalosan elfogadott az SI-

rendszerrel való használatra, bár a hónapoknak és éveknek nincs meghatározott másodperc-hosszúsága.

Időmérés a tantervben

1.-2. osztály

Mérések alkalmi és szabvány egységekkel: hosszúság, tömeg, űrtartalom, idő.

Szabvány mértékegységek megismerése: cm, dm, m, dkg, kg, cl, dl, l, perc, óra, nap, hét, hónap, év.

Mennyiségek becslése.

3. – 4. osztály

Az idő mérése: másodperc.

Időpont és időtartam megkülönböztetése.

Fejlesztési követelmények:

Tájékozódás az időben: a múlt, jelen, jövő, mint folytonosan változó fogalmak, pl. előtte, utána, korábban, később szavak megértése, használata.

Időtartam mérése egyenletes tempójú mozgással, hanggal, szabványos egységekkel (másodperc, perc, óra, nap, hét, hónap, év).

Időpont és időtartam tapasztalati úton történő megkülönböztetése.

A családban történtek elhelyezése az időben.

Módszertani alapvetés

Hans Freudenthal(1983) szerint a matematikaoktatásnak olyan jelenségekből, szituációkból kell kiindulni, amelyek a tanulók számára érdekesek, motiváló erővel bírnak, s ezzel nagyban hozzájárulnak ahhoz, hogy a tanulók megértsék a matematikának a tudományban, a társadalomban és a mindennapi életében játszott szerepét.

A realisztikus matematikaoktatás alapja a genetikus elv, amely azt mondja ki, hogy az ismeretek a kezdeti globális és differenciálat-

lan formából mindig pontosabb, egyre kevesebb hibás elképzelést tartalmazó formákban fejlődnek tovább. Az informális eljárásoktól a formális matematikához vezető úton alapvető szerepet játszanak a modellek. (Ambrus, 2002)

A pragmatista pedagógia a megismerő folyamatra helyezte a hangsúlyt, nem sokat törődve a megismerő folyamatban részt vevő személyiség belső világképével. Ennél a felfedeztetős tanítási módszernél többnyire nem is tudta a gyerek, hogy mire kell figyelnie, milyen jelenségeket kell befogadnia a meglevő ismeretei közé. Előfordulhatott, hogy azonos körülmények között dolgozó tanulók más-más ismeretanyaghoz jutottak, más következtetést vontak le az egyes esetekben. Megtörténhetett az is, hogy a meggyőződéses belső képpel össze nem egyeztethető új ismereteket a gyerek szándéka ellenére is elferdítve, a belső képhez igazítva észlelte.

A konstruktivizmus tagadja, hogy minden tudásunk közvetlenül a tapasztalásból ered. A tapasztalat fontos ugyan, de nem egyetlen meghatározója a kialakult tudásnak. Az értelmező, strukturáló elem válik központi jelentőségűvé, azaz a tapasztalatokat értelmező, megismerő ember játszik alapvető szerepet. Elmélete szerint a már meglévő ismeretek, szemléletmódok, a kognitív modellek irányítják az új tudás felépítését, amelyet mindenkinek magának kell megkonstruálnia. A tanulási folyamatot úgy kell megszervezni, hogy a felépítendő tudásrendszer átfogó elemeitől, közös fogalmaitól haladjunk a speciálisak felé, a részletek finomításának irányába. Az ember nem begyűjti, nem magába olvasztja, nem akkumulálja az ismereteket, hanem létrehozza magában. (Nahalka, 2002)

Piaget szerint a tömeg és az idő invarianciája a konkrét műveletek szakaszában (7 – 11/12 éves korig) alakul ki. Ebben az időszakban lesznek a műveleti csoportosulatokból a belsővé válás során műveleti struktúrák. Eljutnak a tanulók az osztályok elkülönítésének logikai műveleteihez, és az aszimmetrikus összefüggések sorba rendezésének a műveleteihez. Felfedezik az átmenetiség fogalmát (tranzitivitás), amely a dedukció alapja. (Piaget, 1997)

A szakasz határai eltolódhatnak, nem lehet egyértelműen csak az életkorhoz kapcsolni, hiszen az egyes gyerekek fejlődése különböző, de a fejlődés szakaszossága mindenkinél megfigyelhető.

Bruner elsősorban a gondolkodási folyamatokkal és a fogalomalkotással foglalkozott. (Ambrus, 1995) Szerinte a matematikaoktatásban elsősorban olyan alapelvekre kell koncentrálni, amelyek feltárják a valóság és a matematika belső világának kapcsolatát, és lehetővé teszik azok magyarázatát. Ahhoz, hogy a tanuló egy anyagot megértsen az szükséges, hogy ezt megelőzően intuitív formában feldolgozza.

A fogalomalkotás osztályba sorolással kezdődik. Minden alkalommal osztályba sorolunk, amikor felismerünk egy előzőleg már látott tárgyat. A hasonlóságok alapján tapasztalatainkat különböző csoportokba soroljuk. Az absztrakció tartós szellemi változás, az absztrahálás eredménye, ami képessé tesz bennünket arra, hogy felismerjük az új tapasztalatot, egy már előzőleg megformált osztályhoz való hasonlóság alapján. (Ez tulajdonképpen asszimiláció.) Érdemes különbséget tenni az absztrakció mint tevékenység, és az absztrakció mint végeredmény között, az utóbbit fogalomnak nevezzük. Egy fogalom megalkotásához számos olyan tapasztalatra van szükségünk, melyekben valami közös van. A mindennapi élet fogalmai a mindennapok tapasztalatából erednek, az ezekre vonatkozó példák térben és időben véletlenszerűen jelennek meg. (Skemp, 1975)

„Nyelvi nehézségekkel küszködik minden tudomány és szakma, amely pontosan akarja kifejezni fogalmait és eredményeit. A matematika kijelentéseknek teljesen pontosaknak kell lenniük. Ha nem pontosak, akkor nincs is értelmük. Ez a magyarázata annak, hogy a matematikában a nyelvi sorompó tűnik rögtön a legfélelmesebbnek.

A köznyelvi szavak jelentése általában eléggé határozatlan, így a beszélgetőknek könnyen lehet az a benyomásuk, hogy megértik egymást, még ha nem is pontosan ugyanazt gondolják. A matematika ki akarja küszöbölni ezt a kétértelműséget. Ki is küszöböli – de cserébe elveszti az érintkezés könnyedségét. Minél gazdagabb és szabatosabb egy információ, annál nehézkesebb az átültetése." (Revuz, 1973)

„Szakszavak tanítása során sokkal nehezebb dolgunk van, mint az anyanyelv egyes fogalmai esetén. Különösen akkor, ha azok a köznyelvben már jelentenek valamit" (Szendrei, 2005)

Ezt a nehézséget tovább fokozza, hogy óriási különbségek lehetnek az egyes gyerekeknél a nyelvhasználat szintjében iskolába lépéskor. Nagy előnnyel kezdik azok tanulók a „tudományos" munkát, akik nyelvileg fejlettebb környezetből indulnak az iskolába, ők szavakkal is ki tudják fejezni magukat.

Hipotézis

Feltételezésünk szerint a hétköznapi és a tudományos fogalmak nincsenek szinkronban egymással.

Azt, hogy a tanulók ismerik az időmértékegységeket nem jelenti, hogy tudnak is vele dolgozni.

A sokféle váltószám nehezíti az időmértékegységekhez kapcsolódó problémák megoldását.

A mérés helye és ideje

A kitűzött feladatokat két iskolában oldották meg a negyedik osztályos gyerekek.

Egy kb. kétezer lakosú kis faluban, Esztárban az Irinyi Károly Általános Iskolában. Itt egyetlen negyedik osztály van, melyben 21 gyerek tanul.

A másik iskola Debrecenben található, ez a Benedek Elek Általános Iskola. Itt sem válogatott gyerekek tanulnak. Két osztály vett részt a vizsgálatban, összesen 46 tanuló.

A mérést május utolsó hetében végeztük, hogy megfelelő képet kapjunk a gyerekek alsó tagozaton elsajátított ismereteiről.

A mérőlap feladatai és megoldása

Az első feladatban arra voltunk kíváncsiak, hogy milyen szinten ismerik a mértékegységeket, s a többi mértékegység közül sikeresen kigyűjtik-e az idő egységeit.

1.) Az alábbi mértékegységeket válogasd szét!

kilométer, perc, rőf, liter, kilogramm, fertályóra, tonna, méter, hónap, centiméter, deciliter, év, mérő, dekagramm és hektoliter.

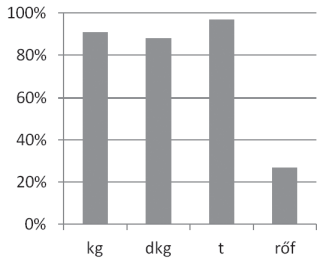
hosszúság: ..tömeg: ...űrmérték: ...időmértékegység: ..

Az időmértékegységeket egészítsd ki a tanultakkal!

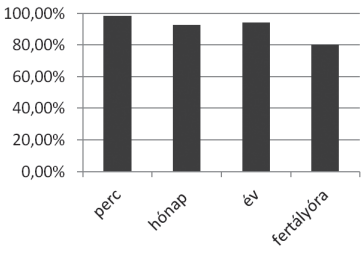
Rendezd csökkenő sorrendbe a tanult időmértékegységeket!

A feladat megoldása megfelelően sikerült a gyerekeknek. A rőf és a mérő besorolása eléggé eklektikus volt. A mérővel nem igazán boldogultak. A rőfről egy mese kapcsán tanultak a gyerekek. Mivel a mesében a kolbászt rőffel mérték, ezért a legtöbben a tömegmértékegységekhez sorolták azt, a hétköznapi életben tapasztaltak alapján. Az időmértékegységek ismerete jónak mondható. A kiegészítésre való utalást nem igazán értették meg a gyerekek, ennek következtében a sorrendben is több hiba volt a vártnál.

Az alábbi grafikonok a tömeg- és időmértékegységek *(2. ábra)* ismereti szintjét mutatják. A tömegmértékegységek *(1. ábra)* ismerete azért szerepel, hogy a rőf előfordulási gyakoriságát érzékeltetni tudjuk.

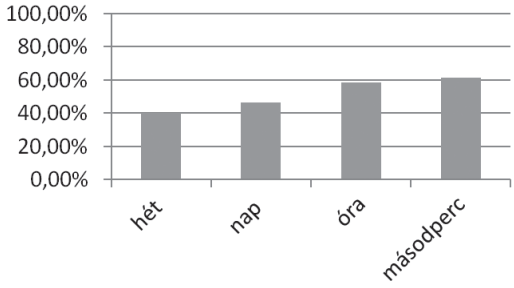


1. ábra



2. ábra

Az időmértékegységek kiegészítésénél sokan újra felsorolták az előzőekben megadottakat. Néhányan a csökkenő sorrend helyett növekvőt képeztek. Ebből az látszik, hogy az időmértékegységeket felismerik , de a saját tudásukból nehezebben hozzák felszínre az ismereteket. Ezt az alábbi *3. ábra* jól érzékelteti, hogy melyek azok az időmértékegységek, amelyekkel kiegészítették a megadottakat. A másodpercet negyedik osztályban tanulják a gyerekek, valószínűleg ezért emlékeztek rá többen, mint a napra vagy a hétre.



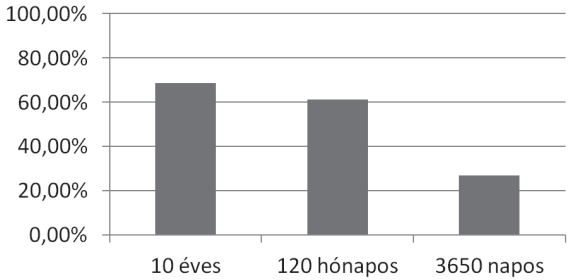
3. ábra

A második feladatban azt vizsgáltuk, hogy tudják-e megfelelően alkalmazni a tanultakat egy valós probléma megoldásában?

2.) Kati 2007. január 15-én született. Hányadik születésnapját ünnepli 2017. január 15-én?

Hány hónapos ekkor Kati? Hány napos ekkor Kati?

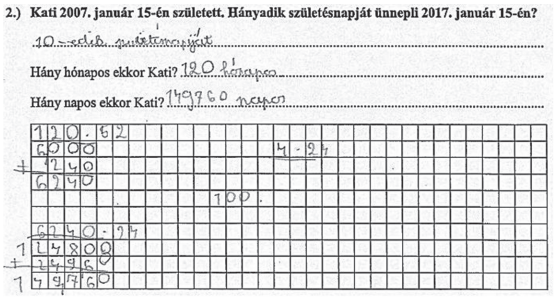
A megoldás eredményességét az alábbi *4. ábra* mutatja. Az évek számát többen a kezükön számolták ki, ezért előfordult, hogy a születési évet egynek vették, s így 11 éves lett Kati.



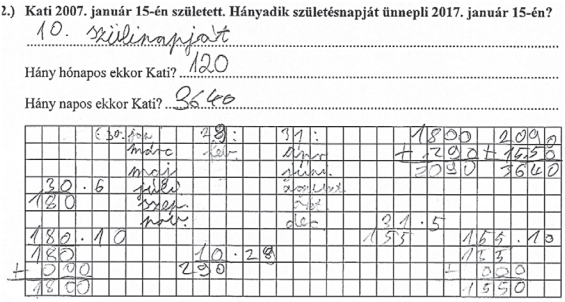
4. ábra

A napok számára csak egy teljesen tökéletes megoldás érkezett, egy esztári kisfiú volt az, aki tudta, hogy erre az időtartamra 3 szökőév esik, s így Kati 3653 napos. Egyébként egy debreceni kislány is számolt szökőévvel, de ő csak kettővel, és csak 9 évet adott össze, pedig a feladat többi része jó.

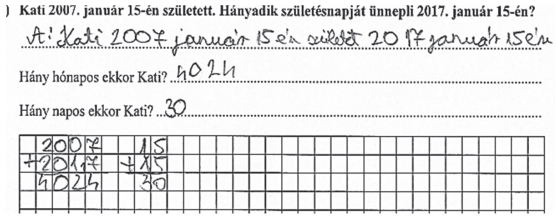
A napok számának meghatározására sok érdekes megoldás született:



6. ábra



7. ábra



8. ábra

Három kidolgozás azt mutatja, hogy a hetek, hónapok, napok közötti váltások elég zavarosak még azoknál a gyerekeknél is, akik jó megoldásokat adtak az előző feladatra. Ez alátámasztja azt a hipotézisünket, hogy valószínűleg a sokféle váltószám helyes kezelése miatt van több probléma az időméréssel. A *6. ábrán* láthatjuk, hogy a gyerek az évet megszorozta a hónapokkal, a hetekkel és végül nem a napok számával – amiben még lett is volna logika –, hanem az egy napban lévő órák számával. A *8. ábrán* látható megoldást

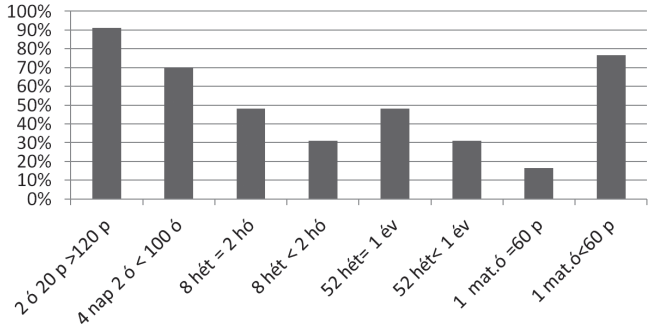
adó tanulónak komoly problémái vannak a szövegértéssel is, mivel az évszámok összeadásával adta meg a hónapok számát és az évszámban szereplő napok összeadásával a napokét.

A harmadik feladatban az időtartamok összehasonlításának szintjére voltunk kíváncsiak. No meg arra is, hogy a nem pontos váltószámok ismerete befolyásolja-e őket a döntésben.

3.) Melyik a hosszabb időtartam? Tedd ki a megfelelő relációs jelet!

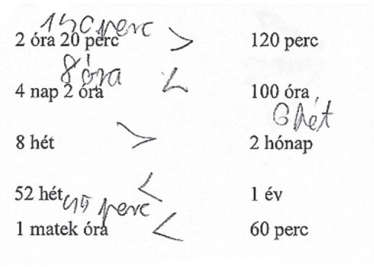
a.) 2 óra 20 perc 120 perc
b.) 4 nap 2 óra 100 óra
c.) 8 hét 2 hónap
d.) 52 hét 1 év
e.) 1matek óra 60 perc

A megoldás eredményességét a *9. ábra* mutatja.

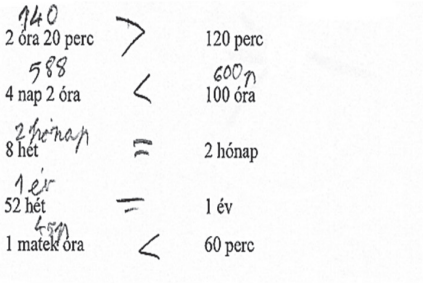


9. ábra

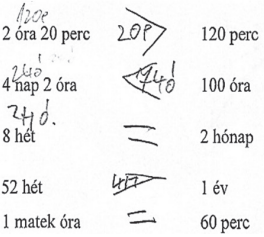
Az első kettőnek a megoldása a tanult mértékváltáson alapult. Úgy gondoljuk, hogy ez reális értéket mutat, bár a b.) feladat megoldása olyanoknak is sikerült, akik rosszul váltottak. Ezt láthatjuk a 10. és a 12. ábrán. A c.) és d.) feladatoknál már a hétköznapi életben tapasztaltak és az iskolában tanult váltások kicsit szórták a megoldásokat, itt láthatunk ellentmondásokat is. Pl. a *10. ábrán,* ha 2 hónap 6 hét, egy év és az 52 hét viszonyának fordítva kellene lenni. Ebből a szempontból nézve a 12. ábra egy következetességet mutat bár a meg oldás nem helyes. Az e.) feladatnál a szubjektív érzése szerint döntött néhány gyerek, így olyanok is voltak, akik a matematika órát hosszabbnak gondolták a 60 percnél.



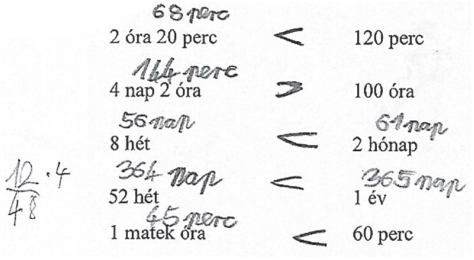
10. ábra



11. ábra



12. ábra

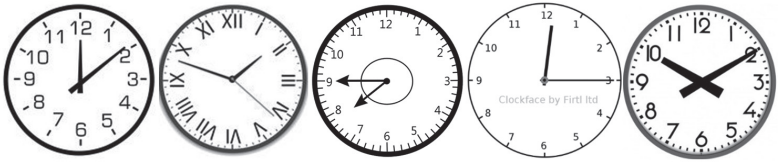


13. ábra

A grafikon leolvasásakor azt gondolnánk, hogy ugyanazok a gyerekek gondolják egyenlőnek a c.) és d.) feladatban megadott mennyiségeket, de mint azt a *10.* és *11. ábrán* láthatjuk a valóságban nem így van. Ezekből arra következtethetünk, hogy a tanulók ismeretei bizonytalanok, további erősítésre szorulnak. Törekedni kell az ismeretek és a közöttük lévő kapcsolatok mélyebb elsajátíttatására. Sajnos nem minden gyerek írta le a számítását, de ezt nem róhatjuk fel nekik, mert a feladat megfogalmazásában ez nem szerepelt.

A negyedik feladatban azt vizsgáltuk, hogy milyen szinten ismerik a különböző beosztású és számlapú órákat.

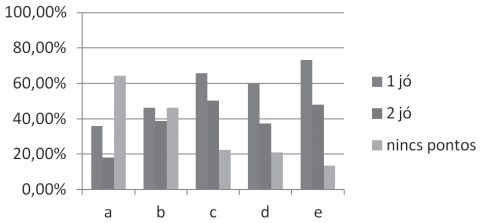
4.) Milyen időpontokat mutathatnak az órák? A megoldásodat írd le többféleképpen!



a *b* *c* *d* *e*

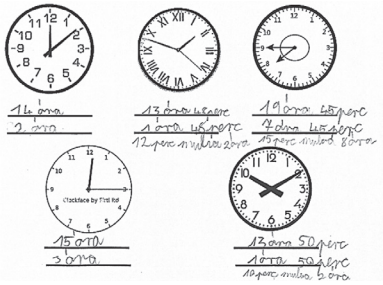
Itt igen nagy különbség volt a gyerekek megoldásában, az egyik debreceni osztály szinte csak a digitális óráknak megfelelően írta le az időpontokat, a többiek megoldása változatosabb volt. Sokan nem tudták megkülönböztetni egymástól az óra- és a percmutatót. Többen rosszul értelmezték az óramutató helyét.

A feladat megoldásának eredményességét a 14. ábra mutatja. Aki két jó megoldást adott, azoknak a száma benne van az egy jó megoldást adók számában is. A kettő oszlop eltérése mutatja azoknak a számát, akik csak egy jó megoldást írtak. A „nincs pontos" megoldás pedig azt jelenti, hogy csak közelítőleg határozták meg az időt. Pl. az a.) esetben 12:10-et írtak, nem vacakoltak azzal az 1 perccel.

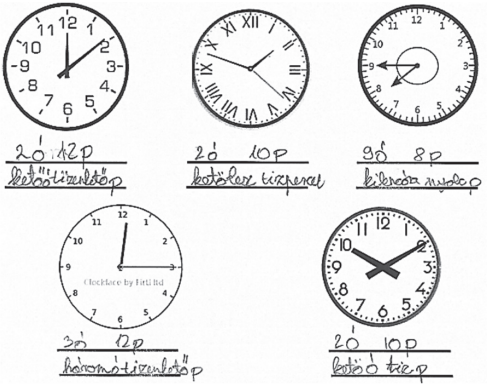


14. ábra

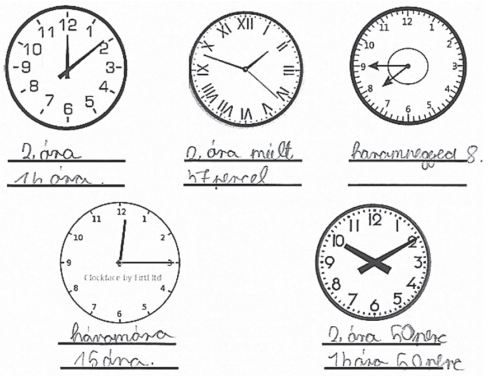
Az első óra leolvasását nehezítette, hogy nem voltak bejelölve a percek. Megbeszéltük, hogy a harmadik órán lévő másodpercmutatót figyelmen kívül hagyják, amit be is tartottak, így a gyengébb teljesítmény nem ebből adódott, hanem az óra és perc pontatlan leolvasásából. Néhány tanuló három vagy akár négy megoldást is adott egy-egy esetben, mivel ez nem volt jellemző, ezért nem elemeztük részletesebben.



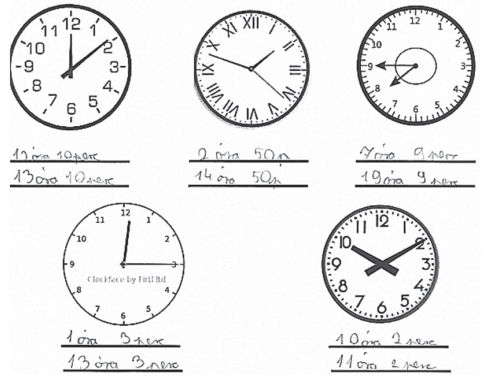
15. ábra



16. ábra



17. ábra



18. ábra

Mint a 18. ábrán láthatjuk, a percet sokan ugyanúgy olvasták le, mint az órát. Ha a percmutató a 9-esen állt, akkor kilenc percet írtak. Ha az óramutató a kettest megközelítette, akkor a leolvasás két órával kezdődött meglehetősen sok tanulónál. A b.) órára adott megoldásokat az is nehezítette, hogy az római számokkal jelezte az órákat. Az a.) a d.) és az e.) óráknál a gyerekek szerint nehezen lehetett megkülönböztetni az óra- és a percmutatót. Voltak persze tökéletes megoldások, de nem volt több 35 %-nál.

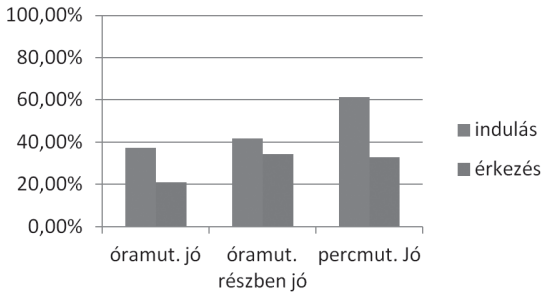
Az ötödik feladatban már időpont és időtartam egyszerre szerepelt.

5.) Budapestről a vonat 14óra 23 perckor indult el Szolnokra, és 95 perc alatt ért oda. Rajzold be az órán a mutatókat! Az indulási időpontot kékkel, az érkezésit pirossal!

Egy mutatók nélküli órán kellett a két időpontot berajzolni. Az óra számlapján római számok szerepeltek.

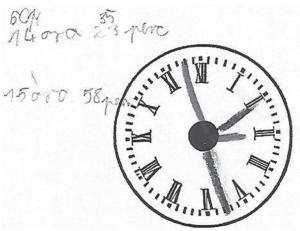
Az indulási idő bejelölésénél a tanulók 37,3 %-a dolgozott jól. Részben jól teljesítettek azok (41,8 %), akik az óramutatót a 2-esen hagyták, csak a percmutatót forgatták. A percmutatót a gyerekek 61,1 %-a jelölte be pontosan. Véleményünk szerint a percmutató berajzolása elég jónak mondható az előző feladatok megoldásához képest. Az érkezési idő bejelölésénél már több probléma is felmerült. Átváltást és összeadást is kellett végezni a jelölés mellett. Kevesebben figyeltek oda arra, hogy majdnem négy órára ér oda a vonat, s a három óráról mindenképpen el kell mozdítani az óramutatót. Az óra- és percmutató pontatlan jelölése pedig főleg az átváltás és a műveletvégzés hibájából adódott.

A megoldások eredményességét az alábbi ábra mutatja.

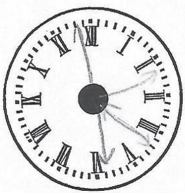


19. ábra

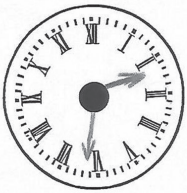
Néhány megoldás:



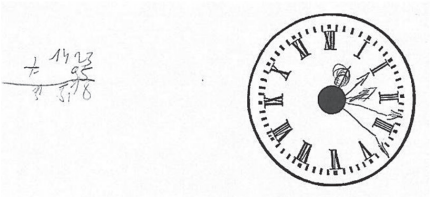
20. ábra



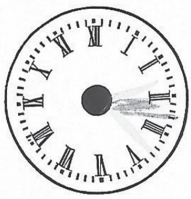
21. ábra



22. ábra



23. ábra



24. ábra

A *20. ábrán* jól látható, hogy az óramutató nem mozdult el a 2 és 3 óráról, a percmutató az indulási időnél pontatlan, mert a 23 perc helyett 28 percet jelölt be. Ez köszönhető lehet a római számoknak is. A 21. ábra egy olyan megoldást mutat, amelyen lehet látni, hogy a gyerek jó megoldást adott a számolásban, de a 15 óra helyett öt órát jelölt be, de az óramutatókat is helyesen mozgatta. Néhányan *(23. és 24. ábra)* 100-as váltószámot alkalmaztak a perc és az óra között. Bár a 24. ábra látható megoldás arra utal, hogy jól gondolkodott a tanuló, de a végén mégis rossz megoldást írt. Valószínűleg ez a fejben való dolgozásnak köszönhető.

Szerencsésebb lett volna két órát megadni, s az egyiken jelölni az indulási időt, másikon az érkezésit. Valószínűleg egyértelműbb lett volna a gyerekek számára a megoldás, hogyha mindkét órán két-két mutatót kell bejelölni. Ez lehet az oka annak, hogy néhányan, mint a 22. ábrán is látható a két időpontot egy-egy mutatóval jelezték az órán.

Konklúzió

Jobban össze kellene hangolni az időmértékegységekhez kapcsolódó problémákat a különböző tantárgyakban, hogy eredményesebb legyen ennek a témakörnek az oktatása.

Sokkal hatékonyabban kell támaszkodni azokra az ismeretekre, amelyeket a gyerekek magukkal hoznak az iskolába. A hétköznapi életben szerzett tapasztalatokra jobban kellene támaszkodni a tanításban.

Többféle számlapú órán kellene különböző időpontokat leolvasni, beállítani. A valóéletből vett időpontok beállítása és a köztük eltelt időtartam meghatározásának szorgalmazása szükséges.

Hatékonyabb motivációra lenne szükség, hogy a gyerek érezze, szükség van a tanult ismereteire.

Irodalomjegyzék:

1. Ambrus András: Bevezetés a matematika didaktikába, ELTE Eötvös Kiadó, 1995.
2. Ambrus András: Nemzetközi tendenciák a matematika oktatásában, http://xml.inf.elte.hu/~mathdid/ambrus/tendenc.pdf, 2002.
3. Dienes Zoltán: Építsük fel a matematikát, Gondolat, Budapest, 1973.
4. Hans Freudenthal: Didactical Phenomenology of Mathematical Structures, Dortrecht, D.Reidel Publishing Company, 1983.
5. John Holt: Iskolai kudarcok, Gondolat, Budapest 1991.
6. Nahalka István: Hogyan alakul ki a tudás a gyerekekben? Konstruktivizmus és pedagógia. Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 2002.
7. Jean Piaget: Az értelem pszichológiája, Kairosz Kiadó, 1997.
8. André Revuz: Modern matematika – élő matematika, Gondolat, Budapest, 1973.
9. Richard R. Skemp: A matematikatanulása pszichológiája, Gondolat, Budapest, 1975.

10. Szendrei Julianna: Gondolod, hogy egyre megy? Dialógusok a matematikatanításról tanároknak, szülőknek és érdeklődőknek, Typotex Kiadó, Budapest, 2005.
11. Vigotszkij: Gondolkodás és beszéd, Trezor Kiadó, Budapest, 2000.
12. Kerettanterv az alapfokú nevelés-oktatás bevezető és kezdő szakaszára (1-4. évfolyam) (http://www.okm.gov.hu/main.)
13. Természettudományi kisenciklopédia, Gondolat ,Budapest, 1975.

A geometria egy lehetséges bevezetése felfedeztető matematikaoktatás segítségével

Tóth Mariann, gimnáziumi tanár,
Debreceni Fazekas Mihály Gimnázium

Ambrus Andrással a kétezres évek elején ismerkedtem meg. Akkoriban ő lejárt Debrecenbe, ahol a tanár szakosoknak tartott órákat és emellett a didaktika doktori iskola hallgatóinak tartott szemináriumot. Ez utóbbiakba kapcsolódhattam be én is, majd a PDTR (Development of Teacher-Researchers) projektnek is a tagja lettem. Ezeken a szemináriumokon nagyon sokat beszélgettünk a tanítás nehézségeiről, a magyar matematikaoktatás erősségeiről és problémáiról. Bármiről is folyt a szó, mindig volt Andrásnál egy a témához kapcsolódó idézet, cikk, esetleg könyv, ami új megvilágításba helyezte a dolgokat, vagy éppen megerősített minket a véleményünkben. Így nem meglepő, hogy András hatására kezdtem el didaktika könyveket, cikkeket olvasni, ami sokat segített abban, hogy tudatosabban tanítsak. Emellett sokat tanultam a kutatások módszertanáról, megterveztem egy önálló tanítási kísérletet, amit ki is próbáltam. A PDTR keretében részt vettem két konferencián, ahol egyrészt Európa különböző országaiból tartottak előadásokat vezető didaktikusok, és a szemináriumokon lehetőségünk nyílt megismerkedni más országok matematika tanáraival is.

Ezekben az években részt vettem Pósa Lajos több táborában, ahol zseniálisan felépített felfedeztető matematikatanítást tapasztalhattam meg. Így András és Lajos hatására kezdtem el egyre tudatosabban felfedeztetni óráimon és szakköreimen. Emellett nagyon fontos számomra, hogy a diákok sok konkrét tapasztalatot szerezzenek (rajzoljuk le, szerkesszünk, rakjuk ki, építsük meg…). Azt gondolom, hogy ma nagyon korán elmaradnak ezek az élmények a gyerekek életéből, túl korán térünk át a „gondolatkísérletekre", tereljük őket a szimbolikus reprezentációk felé. Azt tapasztaltam, hogy felfe-

deztetve és sok tárgyi manipulációval eleinte lassabban tudunk haladni, de később az így kialakult fogalmak biztosabban, gazdagabbak. Így később gyorsabban tudunk haladni, a diákok kreatívabbak a problémamegoldásban és a motivációjuk is nagyobb. Természetesen ennek is megvannak a korlátai, nem mindent tudnak a diákok maguk felfedezni, ezért fontos az egyensúly megtalálása.

Problémafölvetés

A matematika azon kevés tudományok egyike közé tartozik, melynek fontos része a saját magáról való meta-gondolkodás. A matematikusok mindig is törekedtek arra, hogy tisztázzák a fogalmakat, bizonyítsák a köztük lévő összefüggéseket. Céljuk az volt, a tudományuk teljes és ellentmondásmentes legyen, ezért már elég hamar megjelent a matematika alapfogalmainak tisztázására való igény. Ennek a folyamatnak lett az eredménye a mai axiomatikus tárgyalásmód, mely során bizonyos alapfogalmakból, és igaznak elfogadott alapállításokból származtatunk minden más fogalmunkat, és vezetünk le minden állításunkat. E vizsgálódások teljesednek majd ki Gödel-féle nemteljességi tételében, mely kimondja, hogy, egy kellően bonyolult axiómarendszer vagy ellentmondásos (le lehet vezetni benne egy állítást és az ellenkezőjét is), vagy nem teljes (lesznek benne olyan kérdések, melyekre nem tudunk választ adni). A matematikatanítás egyik fontos feladata (lenne), hogy a gyerekeket megismertessük az axiomatikus gondolkodás elemeivel, és középiskolai tanulmányaik vége felé Gödel-féle nemteljességi tételével. Ennek első állomása lehet a következőkben bemutatott bevezetése a geometriának.

A fejlesztő program

A program 13-14 éves matematika iránt érdeklődő diákok számra készült. Ebben a korban találkoznak a gyerekek az első prematematikai bizonyításokkal, és ekkor jelenik meg a matematikai

szaknyelv egyre pontosabb használatának igénye is. Ehhez illeszkedik a program témája is, a matematika alapjainak pontosabb megismerése, az axiomatikus tárgyalásmód bevezetése.

A program célja elsődlegesen a diákok matematikáról való metagondolkodásának fejlesztése. Emellett a felfedeztető matematikaoktatás fejleszti a gyerek kreativitását, problémafelvető és megoldó képességét, és kommunikációs képességeit is, valamint pozitívan hat a tantárgyhoz kötődő motivációjukra.

1. Feladat: Rajzoljon mindenki egy pontot!

Ezt meghallva mindenki boldog szokott lenni, hiszen úgy érzi, hogy végre valami, amit biztosan és könnyen meg tud oldani. Ezután néhány diákkal felrajzoltatom a megoldását a táblára, és megpróbáljuk kiválasztani ezek közül azokat, amelyek tényleg pontok. Általában két részre szokott oszlani a csapat, vannak, akik egy x-et tesznek a papírjukra, míg mások próbálnak minél kevésbé hozzáérve a füzethez, a lehető legkisebb nyomot hagyni azon. Ekkor elindul a vita, hogy a kettő közül melyik lehet a jó, esetleg mindkettő? Így fölmerül az igény, hogy tisztázzuk, mi is az a pont.

Lehetséges segítő kérdések: Pont-e ez, ami a táblára került? Nem túl „kövér" ez? Hol van itt az x-nél a pont? (A szélén? A vonalak metszéspontjában?)

Szerencsére táblán nagyon nehéz „kicsi" pontot rajzolni, így azt mondják a gyerekek, hogy valami sokkal kisebbet képzeljek el, csak hát itt így sikerült.

Kérdés: Mennyivel kellene kisebbet rajzolni? (Jön valaki, aki próbálja megmutatni, vagy mutatják a füzetüket.) Kérdés: Ez már elég kicsi? És ha elővennék egy mikroszkópot? Akkor ez már jó nagynak látszódna, nem? Egyáltalán mi is az a pont?

2. Feladat: Adjunk definíciót, mi az a pont?

Válaszok: Valami, aminek nincs kiterjedése. / Valami aminek nulla a kiterjedése. Itt rövid vita szokott zajlani erről, majd megállapodnak a gyerekek valamiben.

Kérdés: Mi az a kiterjedés?

Válasz: Nincs / nulla a szélessége, hosszúsága és magassága.

Kérdés: Mi az a szélesség / magasság / hosszúság? Amit rajzoltunk a füzetbe pontot, annak melyik a hosszúsága és hol van a szélessége? (Mutassuk meg!) Van olyan, aminek csak az egyik van /egyik nem nulla?

Válasz: Az egyenes, szakasz.

3. feladat: Rajzoljunk egyenest!

Itt elég hamar kiderül, hogy azt nem tudunk rajzolni, mert vége a füzetnek, táblának, pedig azt végtelen sokáig kellene húzni. (Annyi időnk és helyünk pedig nem nagyon van.)

Kérdés: És a pont, amit korábban rajzoltunk, akkor jó volt?

Válasz: Nem.

Tehát nem tudunk se pontot, se egyenest rajzolni. Akkor próbálkozzunk tovább legalább egy definícióval! Kiderül, hogy azt se tudunk adni, mert mindig használunk valami olyan fogalmat, amit még szintén nem definiáltunk, és amit így még tisztázni kellene.

Ezután szoktam beszélni a gyerekeknek a matematikai alapfogalmakról és az axiómák szerepéről. Valahol már meg kell állnunk a definíciókkal, különben mindig magyarázhatnánk tovább, vagy körbeérnénk, és egymással magyaráznánk a fogalmakat. Ezért a matematikusok megállapodtak, hogy mi legyen az a néhány dolog, amit már nem definiálunk, amiről azt gondoljuk, hogy mindenki tudja mik azok, ezek lesznek az alapfogalmak. Ugyanígy van az állításokkal is, minden bizonyításban felhasználunk olyan dolgokat, amiket szintén bizonyítani kellene, és így a sor soha nem érne véget. Soha nem mondhatnák azt, hogy valamivel teljesen kész vagyunk. Ezért megállapodunk néhány dologban, amit mindenki igaznak fogad el, ezek lesznek az axiómák.

Kérdés: Ha a geometria csupa olyan dologgal foglalkozik, amiket nem lehet lerajzolni, olyan fogalmakat használ, amiket nem is definiálunk, miért érdemes ezzel foglalkozni?

Válasz: Mert ennek ellenére egészen jól leírja a valóság egy részét. Mert az építész tudja, hogy a tervén, amit rajzol az nem egy egyenes / szakasz; hogy a valóságban soha nem lesz a fal és a padló pontosan merőleges (hiszen maga a merőleges is csak egy matematikai absztrakció). De mégis, ha amennyire csak lehet, megpróbálunk

közelíteni ehhez az absztrakcióhoz, akkor az épületek állni fognak, és a gépek pedig működnek.

A következőkben megvizsgáljuk az euklideszi geometria illeszkedési axiómáit.

(1) Két különböző pontra pontosan egy egyenes illeszkedik.

(2) Ha három különböző pont nem illeszkedik egy egyenesre, akkor a három pontra pontosan egy sík illeszkedik.

(3) Ha egy egyenes két különböző pontja illeszkedik egy síkra, akkor az egyenes minden pontja illeszkedik a síkra.

(4) Egy egyenesre és egy rá nem illeszkedő pontra pontosan egy sík illeszkedik.

(5) Egy adott pontra pontosan egy olyan egyenes illeszkedik, amely párhuzamos az adott egyenessel.

Ezek az axiómák elég nyilvánvalóak, kivéve talán az utolsót. Miért biztos, hogy van egy erre a pontra illeszkedő párhuzamos egyenes? Mi biztosítja, hogy nincs több ilyen?

A gömbi geometria elemei

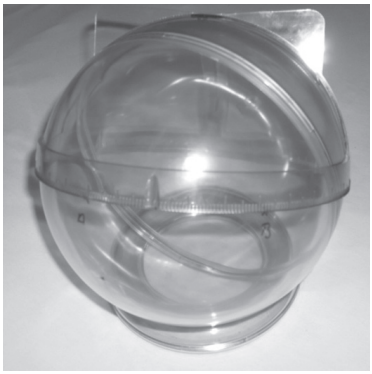
A gömbi geometria tárgyalásához nagyon hasznos segédeszköz a Lénárt-gömb készlet, melyet Lénárt István fejlesztett ki, és készített hozzá egy munkafüzetet is. (Lénárt István: Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön) Az ebben szereplő feladatok segítségével már egészen fiatal gyerekekkel is meg lehet ismertetni a gömbi geometriát. A következőkben ebből a füzetből tárgyalunk meg néhány feladatot, melyek segítségével be tudjuk mutatni a gyerekeknek az elliptikus geometriák elemeit. Így megérthetik, hogy nem csak egyféle geometria van. Természetesen, ha a gyerekeket érdekli ez a téma, szakkörön érdemes ezzel részletesebben is foglalkozni.

4. Feladat: Adott két pont a síkon / gömbön, rajzoljuk meg az őket összekötő legrövidebb vonalat!

Ennek a szemléltetésére hasznos lehet némi színezett víz. Cseppentsünk műanyag lapra (esetleg tükörre) a vízből. Milyen vonal mentén halad a vízcsepp? Vizsgáljuk meg ugyanezt a gömbön!

5. Feladat: Szerkesszük meg a két pontot összekötő ív folytatását. Mit kapunk?

Kiderül, hogy ezek a gömbi főkörívek, ezután érdemes elővenni a gömbi vonalzót, és megbeszélni, hogy mik lesznek a gömbi egyenesek.



Lénárt-gömbön a két pontot összekötő egyenes

Kérdés: Bármelyik két pontra pontosan egy egyenes illeszkedik-e?

Válasz: Átellenes pontoknál végtelen sok mindkettőre illeszkedő egyenes van.

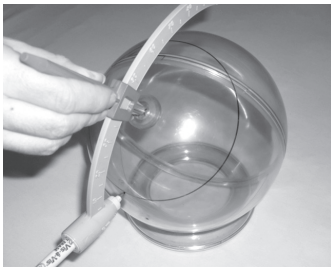
Kérdés: A földgömbön hol vannak egyenesek?

Válasz: A hosszúsági körök és az Egyenlítő egyenes

Kérdés: A többi szélességi kör nem egyenes?

Válasz: Nem, ezek lesznek a gömbön a körök.

6. Feladat: Szerkesszünk köröket a gömbi körző segítségével!



7. Feladat: Szerkesszük meg két egyenes metszéspontjait!

Kérdés: Mindig lesz metszéspont?

Válasz: Mindig két közös pont lesz, ami a gömb két átellenes pontja.

Kérdés: Teljesülnek-e az illeszkedési axiómák?

Válasz: Nem, hiszen nincsenek párhuzamos egyenesek.

Kérdés: Miben változik meg ettől a geometriánk?

Itt érdemes hagyni kísérletezni a gyerekeket, keressenek eltéréseket az euklideszi és a gömbi geometria közt. A felmerülő sejtéseket írjuk fel, és egy szakkörön beszéljük meg az érdeklődőkkel, ha órán nincs rá idő. Azonban mindenképpen érdemes megvizsgálni a háromszögek belső szögeinek az összegét.

8. Feladat: A földgömbön a 0. hosszúsági kör, a 90. hosszúsági kör és az Egyenlítő meghatároz egy háromszöget. Mekkorák ennek a háromszögnek a szögei?

Válasz: Minden szög derékszög. De itt akkor nem 180° a belső szögek összege.

Kérdés: Mekkora lehet a szögösszeg?

Válasz: A szögösszeg mindig nagyobb 180°-nál és kisebb 540°-nál.

A hiperbolikus geometria elemei

A következőkben a hiperbolikus geometria kör-modelljének egy leegyszerűsített változatával ismerkedünk egy kicsit.

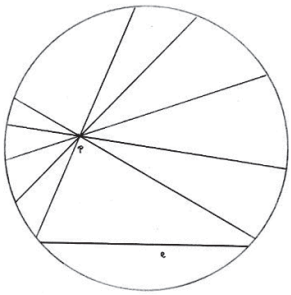
Kérdés: A gömbi geometria tárgyalásánál láttuk azt, hogy van olyan geometria, ahol az illeszkedési axiómák közül az (5) azért nem teljesült, mert nem tudtunk párhuzamos egyeneseket rajzolni. Lehetséges-e olyan geometria, ahol egy ponton keresztül több párhuzamos egyenest is tudunk húzni egy adott egyenessel?

Válasz: Bizonyára igen.

Itt érdemes beszélni kicsit a nem-euklideszi geometriák történetéről, hiszen a magyar Bolyai Jánost azt gondolom, mindenkinek ismernie kellene. Ő volt az egyik első (az orosz Lobacsevkij-jel egy időben), aki úgy gondolta, hogy lehet olyan geometria, melyben a párhuzamossági axióma nem az euklideszi módon igaz. Ebből kiindulva „semmiből egy új, más világot teremtett", azonban Gauss, akinek elküldte a munkáit, nem fogadta pozitívan. (Azt állította, hogy ő ugyanerre már rég rájött, csak nem publikálta.) Ez teljesen elvette Bolyai János kedvét a további matematikai kutatásoktól, és csak jóval a halála után kapta meg az őt megillető elismerést. A Bolyai-Lobacsevszkij-féle hiperbolikus geometria egyik legegyszerűbb modellje lehet a következő. Képzeljük el, hogy a világunk egyetlen körlap. A pontok ennek a (nyílt) körlapnak a pontjai. (Itt sokat segít, ha hivatkozunk Mézga Aladár csodálatos kalandjaira, majdnem minden gyerkőc emlékszik arra a részre mikor Aladár egy korong alakú világról menekít ki egy gondolkodót.)

Kérdés: Mik lehetnek itt az egyenesek?
Válasz: A körlap húrjai.
Kérdés: Mikor párhuzamos két egyenes?
Válasz: Ha nincs közös pontjuk. / Ha a körvonalon lenne a metszéspontjuk.

Kérdés: Ha felveszünk egy egyenest, és rajta kívül egy pontot, hány párhuzamost tudunk húzni a ponton keresztül az egyenessel?
Válasz: Végtelen sokat. / Kettőt.



Végtelen sok e-vel párhuzamos egyenes a P ponton keresztül

Fontos itt elmondani a gyerekeknek, hogy persze ebben a geometriában nem úgy mérjük a távolságokat, szöget, mint ahogy az euklideszi-síkon megszoktuk; különben az egyeneseink nem lennének végtelenek. Ha bevezetünk egy megfelelő távolság- és szögmérést, azt tapasztaljuk, hogy ebben a geometriában a háromszögek belső szögeink az összege kisebb mint 180°.

Az előzőekben kicsit közelebbről megismerkedtünk a geometria alapfogalmaival és axiómáival. Megvizsgáltuk a párhuzamossági axióma lehetséges formáit, és ez alapján kaptunk három különböző geometriát.

Kérdés: Melyik geometria a „jobb"? Melyiket lehet „jobban használni"?
Válasz: Attól függ, hogy milyen léptékben vizsgáljuk a dolgokat. A hétköznapokban tapasztaltakat az euklideszi geometria írja le. Ha azonban már hajózni szeretnénk, vagy repülővel utazni, a gömbi geometriát kell használnunk.
Ezt a kettőt a gyerekek maguktól is szokták említeni. Érdemes ilyenkor elmondani, hogy a hiperbolikus geometriáról sokáig azt gondolták, hogy az elme szép játéka, de a valósághoz nincs sok köze.

De Einstein a relativitáselméletben már ezt a geometriát használja.

Kérdés: Vannak-e geometriák ezeken kívül?

Válasz: Elemi úton tárgyalhatók nincsenek, de a differenciálgeometria számos más geometriát is ismer, ami nélkül a modern fizika nem létezhetne.

Összegzés

A felfedeztető matematikaoktatás erősen épít a diákok kíváncsiságára, érdeklődésére és kreativitására. Az ezzel a módszerrel elsajátított ismeretek mélyebbek, jobban átlátják a diákok az összefüggéseket. Természetesen ezek az órák nehezebben tervezhetők (a fent leírtak is csak egy lehetséges menetet mutatnak), és eleinte hosszabb időbe kerül egy-egy témakör feldolgozása. Azonban azt gondolom, megéri a fáradtságot, hiszen így diákjaink nyitottabbak lesznek, fejlődik a lényeglátásuk és megtapasztalhatják a felfedezés örömét. A fejlesztő program, amit leírtam, természetesen csak egy fejezete ennek a folyamatnak, azonban talán jól bemutatja a módszer lényegét. Ez a program alapvetően matematika iránt érdeklődő és tehetséges diákok számára készült, de próbálom az elemeit a „normál osztályaimban" is megmutatni. Ott a szűkös órakeret és a nagy létszám miatt nem lehet maradéktalanul megvalósítani, de mindenképpen fontosnak tartom, hogy a matematikától idegenkedők is megismerkedhessenek e tudomány alapjaival, megtapasztalhassák, hogy milyen sokszínű ez a világ; és ezáltal gondolkodásuk és kreativitásuk fejlődjön. Persze ez a módszer tőlem is nagy rugalmasságot követel, hiszen a gyerekek mindig más és más utakon jutnak el az eredményekhez, más kérdéseket és válaszokat adnak, mégis a folyamat végén minden szépen össze kell, hogy álljon. Az elmúlt években sok tapasztalatot szereztem már a felfedeztetésben, de azt gondolom, hogy ez még csak az út eleje, így mindig gyűjtöm az új ötleteket, szép feladatokat, kérdéseket, amikkel még érdekesebbé tehetem az óráimat, és egyre több mindent tapasztalok a gyerekek közt is, amik segítenek a további órák tervezésében és szervezésében.

Szélsőérték problémák elemi megoldása

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

1. Izoperimetrikus problémák

Ebben a dolgozatban szélsőértékek számolásával foglalkozunk, de csupán csak elemi módszereket használunk. Ez azt jelenti, hogy teljesen mellőzzük a matematikai analízis eszközeit. Ez egyes feladatok esetén nem is használható, más esetben inkább az elemi módszerek szépségeire, sokszínűségére és változatosságára fektetjük a hangsúlyt.

A szélsőérték fogalma gyűjtő fogalom, a legnagyobb (maximum) és a legkisebb (minimum) értékek közös megnevezésére használják. Ezek értelmezése a következő:

- **Értelmezés:** Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $M = f(a)$ globális maximuma (egyszerűen maximuma), ha $f(x) \leq M$ minden $x \in D$ esetén.
- **Értelmezés:** Az $f : D \subseteq R \to R$ függvénynek $m = f(b)$ globális minimuma (egyszerűen minimuma), ha $f(x) \geq m$ minden $x \in D$ esetén.

Amennyiben az egyenlőtlenségek a D halmaznak csak egy részhalmazán teljesülnek, a szélsőértékek csak lokáli vagy helyi szélsőértékek. Egy függvénynek lehet több lokális minimuma vagy maximuma is, és a lokális maximum kisebb is lehet mint a lokális minimum. A lokális maximum közül a legnagyobb a függvény globális maximuma, a lokális minimumok közül a legkisebb a függvény globális minimuma.

A szélsőérték problémák közül egyik legrégibb problémák az úgynevezett izoperimetrikus problémák. Az „izoperimetrikus" szó az izo = állandó, periméter = kerület szóösszetételből ered. A probléma a következő:

A síkbeli izoperimetrikus tétel:

- Az adott kerületű síkalakzatok közül a kör a legnagyobb területű.
- Az adott területű síkalakzatok közül a kör a legkisebb kerületű.

Euklidész aki i.e. 300 körül élt, már ismerte a téglalapok izoperimetrikus problémájának a megoldását, amely valószínűleg már előtte is ismert volt. Arkhimédesz (i.e. 287-212), ismerte az izoperimetrikus tétel állítását. Időszámításunk kezdete táján a geometriai szélsőértékek tanulmányozása már meglehetősen fejlett volt. Tudomásunk van arról, hogy Zenodórosz, aki kb. i.e. 200 és i.sz. 90 között élt, írt egy „Izoperimetrikus alakzatok" című könyvet, ennek sajnos egyetlen példánya sem maradt hátra, de az ő eredményeit újra ismertette és bebizonyította az alexandriai *Papposz* i.sz. 300 körül.

A monda szerint az izoperimetrikus probléma eredete a következő: *Dido, Tyrosz* királyának lánya volt. Nagybátyjához, *Acerbászhoz* ment feleségül, akit azonban mesés vagyona miatt hamarosan meggyilkoltak. Dido ekkor *Acerbász* kincseivel együtt Ciprusra menekült, majd innen tovább hajózott Afrika Szicíliához közeli partjaira. Elment a vidék uralkodójához és elmondta neki, hogy szeretne a tengerpart mentén egy földdarabot vásárolni, de nem nagyobbat, mint amekkorát egy marhabőrrel körül tud keríteni. Az uralkodó mosolyogva beleegyezett a szépséges királynő kérésébe, sőt nagylelkűen még meg is ajándékozta egy jókora marhabőrrel. Az okos *Dido* keskeny csíkokra vágta azt szét és a szeleteket összecsomózva olyan hosszú kötélhez jutott, amelyikkel jóval nagyobb (tengerbenyúló) földterületet lehetett elkeríteni a tengerparton, mint amekkorát az uralkodó elképzelt. Így alapította meg Karthágó virágzó városát, aminek később ő lett a királynője.

A középkorban számos neves matematikus foglalkozott ezzel a témakörrel. Néhány híres nevet említve: *Descartes* (1596-1650), *Jacob Bernoulli* (1645-1705), *Johann Bernoulli* (1667-1748), *Euler* (1707-1783), *Lagrange* (1736-1813), és mások Kétségtelenül *Jacob Steiner* (1796-1863) svájci matematikus volt az, akinek a munkássága a korábbi eredmények betetőzését jelentette, szintetizálta a korábbi eredményeket, új ötletekkel gazdagította e problémakört, de mindegyikük (akárcsak *Zenodórosz* is), nyilvánvalónak tartotta és

nem bizonyította azt, hogy létezik megoldása ennek a problémának. (v.ö. [3], 9. oldal). Dirichlet (1805-1859) vette észre először az izoperimetrikus tétel eddigi bizonyításának a hiányosságát, és csak 1870-ben, Weierstrass (1815-1892) küszöbölte ki ezt, ugyanis szigorúan bebizonyította a kör nevezetes szélsőérték tulajdonságát. Ezek után számos más matematikus foglalkozott a probléma különböző bizonyításával (v. ö. [3], 26. oldal), de mindmáig egyetlen igazán elemi bizonyítás sem született.

A síkbeli izoperimetrikus tétel bizonyításának a menete a következő:

- A Weierstrass–tétel segítségével belátjuk, hogy az adott k kerületű n oldalú sokszögek között létezik maximális területű, ha n rögzített.
- Belátjuk, hogy az azonos hosszúságú, n oldalú, zárt sokszögvonalak közül a szabályos sokszög területe a legnagyobb.
- Belátjuk, hogy az adott k kerületű, szabályos sokszögek területének van szuprémuma, midőn befutja N-et, a k kerületű kör területe.

Mivel erre nincs elemi bizonyítás, a dolgozatunkban ezt nem is mutatjuk be, ellenben megjegyezzük, hogy a bizonyításnak számos láncszeme elemi, és ezeket részben fellelhetjük a következő feladatok bizonyításában.

1) A háromszög izoperimetrikus tételei:

- Adott kerületű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legnagyobb a területe.
- Adott területű háromszögek közül az egyenlő oldalúnak a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c az ABC háromszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p = \frac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, és T a területe. Ekkor Heron képlete szerint $T = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

De a számtani és mértani közepeknek az $\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz}$

egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2 = p(p-a)(p-b)(\mathrm{p}-\mathrm{c}) \le \mathrm{p}\left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)}{3}\right)^3 = \frac{p^4}{27}$$

vagyis $3\sqrt{3}\cdot T \le p^2$(*).

Mivel a (*) egyenlőtlenségben az egyenlőség a=b=c esetben áll fenn, ezért a két tétel állítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha p állandó, akkor $T_{\max} = p^2\frac{\sqrt{3}}{9}$, a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min} = \sqrt{3\sqrt{3}\cdot T}$.

2) A négyszög izoperimetrikus tételei:

- Adott kerületű négyszögek közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.
- Adott területű négyszögek közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelölje a, b, c, d az ABCD négyszög megfelelő oldalainak a hosszát, és legyen $p = \frac{a+b+c+d}{2}$ a négyszög félkerülete, és T a területe. A négyszögek esetében is fennáll a Heron képlethez hasonló összefüggés:

$$T = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(\mathrm{p}-\mathrm{d}) - abcd\cdot\cos^2\frac{B+D}{2}}.$$

De a számtani és mértani közepeknek az $\frac{x+y+z+t}{4} \ge \sqrt[4]{xyzt}$ egyenlőtlensége alapján felírható, hogy

$$T^2 \le (p-a)(p-b)(\mathrm{p}-\mathrm{c})(\mathrm{p}-\mathrm{d}) \le \left(\frac{(p-a)+(p-b)+(p-c)+(\mathrm{p}-\mathrm{d})}{4}\right)^4 =$$

$$= \left(\frac{3p}{4}\right)^4 (**)$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha először is $\cos^2\frac{B+D}{2}=0 \Leftrightarrow B+D=180$ $=180°$ vagyis a négyszög körbeírható, továbbá még a= b= c= d is kell teljesüljön. Ezért a (**) egyenlőtlenség alapján a két állítás bizonyítása nyilvánvaló, sőt mi több, az a) esetben ha *p* állandó, akkor, $T_{\max}=\left(\frac{3p}{4}\right)^2$ a b) esetben pedig ha T állandó, akkor $p_{\min}=\frac{4\sqrt{T}}{3}$.

Tanulságos külön megvizsgálni a következő sajátos esetet:

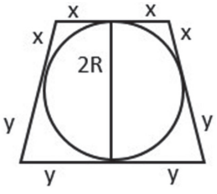
3) A téglalap izoperimetrikus tételei:

- Adott kerületű téglalapok közül a négyzetnek a legnagyobb a területe.
- Adott területű téglalapok közül a négyzetnek a legkisebb a kerülete.

Bizonyítás: Jelöljük, x, y-nak a téglalap méreteit, T-vel a területét, K-val a kerületét. Tehát T=xy és K=2(x+y). Az $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ középarányos egyenlőtlenség alapján azonnal adódik, hogy $T\leq\left(\frac{K}{4}\right)^2$.

És mivel az egyenlőség csak x=y esetben áll fenn, ezzel beláttuk az állításainkat.

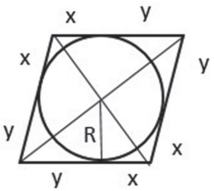
4) Keressük meg egy adott R sugarú kör köré írt egyenlő szárú trapéz kerületének a minimumát!



Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Meghúzva a trapéz két magasságát, Pitagorasz tétele alapján $(2R)^2=(x+y)^2-(x-y)^2$ ahonnan $xy=R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a $p=4(x+y)$ trapézkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8}\geq\sqrt{R^2}\Leftrightarrow p\geq 8R$ és egyenlőség az

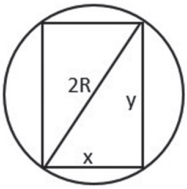
$x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a trapéz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.

5) Mekkora a minimális kerületű rombusz oldala, ha a beírható kör sugara R?



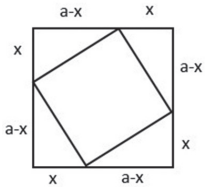
Megoldás: A mellékelt ábra szerint jelölje x illetve y a csúcsok távolságát az érintési pontoktól. Mivel a rombusz átlói merőlegesek egymásra, ezért a magasságtétel értelmében $R = \sqrt{xy} \Leftrightarrow xy = R^2$. Ezzel a feltétellel meg kell állapítanunk a $p=4(x+y)$ rombuszkerület legkisebb értékét. Mivel $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, ezért $\frac{p}{8} \geq \sqrt{R^2} \Leftrightarrow p \geq 8R$ és egyenlőség az $x = y = R\sqrt{2}$ esetben áll fenn, amikor is a rombusz négyzetté alakul, és ekkor $p_{\min} = 8R\sqrt{2}$.

6) Határozzuk meg az R sugarú körbe írt téglalapok közül azt, amelyiknek a legnagyobb a területe!



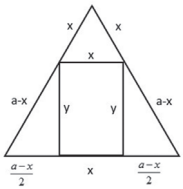
Megoldás: A téglalap oldalait jelöljük x illetve y-nal. Felírható, hogy $x^2+y^2=4R^2$. Továbbá ha T a téglalap területe, akkor $T=xy$. Képezzük a következő függvényt: $f(x,y)=x^2y^2=x^2(4R-x^2=-x^4+4R^2x^2)$. Ekkor az jelöléssel, az $f(t)=-t^2+4R^2t$ függvény minimumát kell meghatározni, amit a $t = -\frac{b}{2a} = 4R^2$ esetben vesz fel, ahonnan $y = R\sqrt{2}$ és így $y = R\sqrt{2}$ ami azt jelenti, hogy a téglalap akkor veszi fel a legnagyobb területet, amikor éppen négyzet.

7) Határozzuk meg, hogy adott négyzetbe írt négyzetek közül melyiknek minimális a területe!



Megoldás: Legyen az eredeti négyzet oldala a. A mellékelt ábra jelöléseit használva felírhatjuk, hogy a beírt négyzet oldalhossza egyenlő, $\sqrt{x^2+(a-x)^2}=\sqrt{2x^2-2ax+a^2}$ ezért a beírt négyzet területe $T=2x^2-2ax+a^2$ aminek minimuma van, és ezt a minimumot $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, vagyis akkor, amikor a beírt négyzet csúcsai éppen oldalfelező pontok.

8) Határozzuk meg az adott szabályos háromszögbe írt téglalapok közül azt, amelynek a legnagyobb a területe!

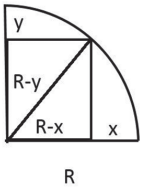


Megoldás: A szabályos háromszög oldalhossza legyen a, továbbá a téglalap méretei pedig *x* és *y*. A mellékelt ábra jelöléseit használva számítsuk ki a téglalap y méretű oldalhosszát: $y=\sqrt{(a-x)^2-\left(\frac{a-x}{2}\right)^2}=(a-x)\frac{\sqrt{3}}{2}$ Tehát a téglalap területe. $T=\frac{\sqrt{3}}{2}x(a-x)=-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a\sqrt{3}}{2}x$. Ennek a másodfokú kifejezésnek maximuma van, és ezt $x=-\frac{b}{2a}=\frac{a}{2}$ esetben veszi föl, amikor is $y=\frac{a\sqrt{3}}{4}$ vagyis a téglalap vízszintes oldal a középvonal, a függőleges oldala a szabályos háromszög magasságának a felével egyenlő.

9) Az R sugarú negyedkörbe téglalapot írunk úgy, hogy egyik csúcs a negyedkör középpontjában, másik csúcsa a negyedkörön legyen. Mikor a legnagyobb ennek a területe?

Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva felírjuk a tég-

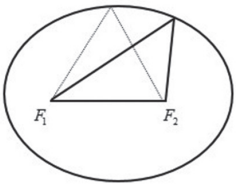
lalap területét: $T=(R-x)\ (R-y)$ és ugyanakkor $(R-x)^{2+}\ (R-y)^2 = R^2$. Az $\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ egyenlőtlenség alapján $a=R-x$, $b=R-y$ választással $\frac{R^2}{2} \geq T$ adódik, egyenlőség $a=b$ vagyis $x=y$ esetben áll fenn amikor is $R-x=R-y=\frac{R\sqrt{2}}{2}$ vagyis a téglalap tulajdonképpen négyzet.



10) Adva van egy háromszög a alapja és k kerülete. Mikor maximális a terület?

1. Megoldás: A Héron képlete szerint, ha $p=\frac{k}{2}=\frac{a+b+c}{2}$ a háromszög félkerülete, akkor $T=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. Ebből állandó az a és a $p-a$ ezért írjuk a területet így: $T=\sqrt{p(p-a)}\cdot\sqrt{(p-b)(p-c)}$. Most alkalmazzuk a $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenséget az $x=p-b$ és $y=p-c$ választással. Ekkor $\sqrt{(p-b)(p-c)} \leq \frac{p-b+p-c}{2}=\frac{a}{2}=állandó$.

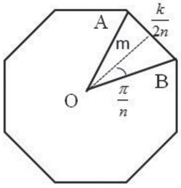
Tehát $T \leq \sqrt{p(p-a)}\,\frac{a}{2}=állandó$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha $x=y$, vagyis $b=c$, vagyis a háromszög egyenlő szárú.



2. Megoldás: Rajzoljunk olyan ellipszist, amelynek a fókuszpontjai az adott alappal egyenlő távolságra vannak egymástól, továbbá a nagytengelye a háromszög kerületének és alapjának a különbsége. Ezen az ellipszisen helyezkedik el a háromszög harmadik csúcsa, és a legnagyobb magasság nyílván valóan az ellipszis tető- illetve mélypontjához tartozik, tehát a legnagyobb területű az a háromszög, amely egyenlő szárú.

11) Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő kerületű szabályos sokszögek közül annak nagyobb a területe, amelyiknek több oldala van!

Megoldás: Legyen O a szabályos sokszög középpontja, k a kerülete, és rajzoljuk meg az egyik oldalához tartozó OAB egyenlő szárú háromszöget, amelynek a magassága legyen m, a középpont-



nál levő csúcsszög fele pedig $\frac{\pi}{n}$. Így a szabályos sokszög területe $T_n = n \cdot \frac{k}{2n} \cdot m = \frac{k}{2} \frac{\frac{k}{2n}}{tg\frac{\pi}{n}} = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{tg\frac{\pi}{n}}$. Legyen most a két egyenlő kerületű, de különböző n_1 illetve n_2 oldalszámú szabályos sokszög. Ezek területe akkor $T_1 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_1}}{tg\frac{\pi}{n_1}}$ illetve $T_2 = \frac{k^2}{4\pi} \cdot \frac{\frac{\pi}{n_2}}{tg\frac{\pi}{n_2}}$.

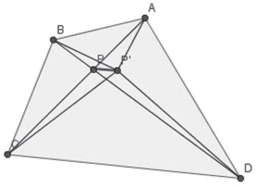
Azt kell megmutatnunk, hogy ha például $n_1 > n_2$, akkor $T_1 > T_2$.

Mindenek előtt szögezzük le, hogy $n_2 \geq 3$, tehát $\alpha_2 = \frac{\pi}{n_2} \leq \frac{\pi}{3}$ és $0 < \alpha_1 = \frac{\pi}{n_1} \leq \alpha_2$. Nyílván elegendő bizonyítani, hogy $\frac{\alpha_1}{tg\alpha_1} > \frac{\alpha_2}{tg\alpha_2} \Leftrightarrow \frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$. Az utóbbi egyenlőtlenség helyes volt át beláthatjuk, ha megrajzoljuk a tgx függvény grafikus képét a $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ intervallumon, ahol a függvény görbe alulról domború (konvex), így az O-t a $(\alpha_1, tg\alpha_1)$ ponttal összekötő húr alatta lesz az O-t a $(\alpha_2, tg\alpha_2)$ ponttal összekötő húrnak, vagyis az első húr egyenesének az iránytangense kisebb mint a második egyenes iránytangense, vagyis $\frac{tg\alpha_1}{\alpha_1} < \frac{tg\alpha_2}{\alpha_2}$. Ezzel igazoltuk az állításunkat.

Eredményül az is következik, hogy az adott kerületű, különböző oldalszámú szabályos sokszögek között nincsen maximális területű.

2. Geometriai szélsőértékek

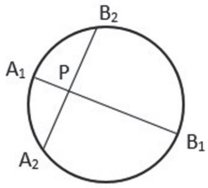
Ebben a részben geometriai problémák szélsőértékeinek a megállapításával foglalkozunk, a síkgeometriai vizsgálatokat részesítve előnybe. Ezúttal is csak elemi módszerekkel bizonyítunk, mellőzve a felsőbb matematikai fogalmakat, ismereteket, számolásokat.



1. példa: Az ABCD konvex négyszög belsejében keressük meg azt a P pontot, amelyre a PA+PB+PC+PD összeg minimális.

Megoldás: Igazolni fogjuk, hogy a szóban forgó P pont éppen az AC és BD átlók metszéspontja lesz. Feltételezzük az ellenkezőjét vagyis, hogy az átlók metszéspontján kívül létezik olyan P' pont amelyre P'A+P'B+P'C+P'D < PA+PB+PC+PD. A háromszög egyenlőtlensége alapján felírható, hogy P'A+ P'C > AC = PA+ PC és P'B+ P'D> BD = PB+PD és ezek összegzéséből adódik, hogy P'A+P'B+P'C+P'D> >PA+PB+PC+PD és ez ellentmondás.

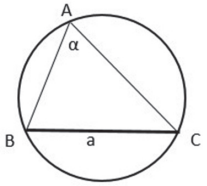
2. példa: Adott körlemeznek egy tetszés szerinti pontjában rajzoljuk meg a legnagyobb és a legkisebb húrt!



Megoldás: Legyen P a körlemez egy adott pontja. Nyílván való, hogy ezen át húzott leghosszabb húr éppen az átmérő lesz, legyen ez A_1B_1. Legyen most A_2B_2 egy másik húr, amelyik áthalad a P ponton. A pontnak a körre vonatkozó hatványa szerint ellenben $A_1P \cdot PB_1 = A_2P \cdot PB_2 = állandó$.

De a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $A_2B_2 = A_2P + PB_2 \geq \sqrt{A_2P \cdot PB_2} = állandó$, egyenlőség akkor áll fenn, ha $A_2P \cdot PB_2$ de ez csak akkor igaz, ha az A_2B_2 húr merőleges az A_1B_1 húrra.

3. példa: Azon háromszögek közül, amelyek egyik szöge α, a vele szemközti oldala a, szerkesszük meg a legnagyobb kerületűt!



Megoldás: Tehát a szóban forgó ABC háromszög A szöge α nagyságú, és BC oldala a nagyságú, adott szakasz. Ezek szerint az A pont egy olyan körön változik, amelyben a BC egy húr, és az A csúcs a körön van, α nagyságú kerületi szög. A szinusz tétel alapján $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$. Mivel $\frac{a}{\sin\alpha}$ állandó, ezért az R is állandó. Továbbá $b=2R\sin B$, $C=2R\sin C$ ahonnan kapjuk, hogy

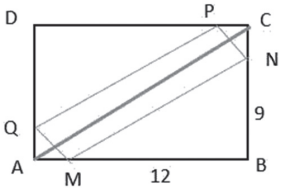
$$b+c=2R(\sin B+\sin C)=4R\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}=$$

$$=4R\cos\alpha\cdot c\,\mathrm{os}\,\frac{B-C}{2}\le 4R\cos\alpha=\textit{állandó}$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha

$c\,\mathrm{os}\,\frac{B-C}{2}=1\Leftrightarrow\frac{B-C}{2}=0\Leftrightarrow B=C$ vagyis az ABC háromszög egyenlő szárú.

4. példa: Egy téglalap oldalai 12cm illetve 9cm hosszúak. Bizonyítsuk be, hogy a téglalapba írható négyszögek kerülete legalább 30 cm!



Megoldás: A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négyzet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.

A téglalapba egy tetszőleges MNPQ négyszöget írunk. Vegyük észre, hogy ez egyre kisebb méretű, ahogy két oldala a négy-

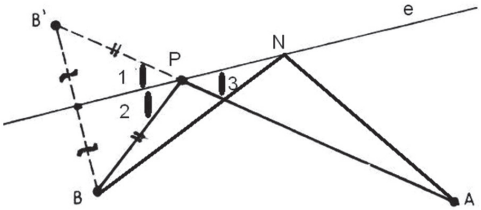
zet egyik átlója felé közeledik. Ezen közeledéskor (lásd az ábrát) az MNPQ négyszög két oldala a 0 felé közeledik, másik kettő pedig a téglalap átlója felé tart. Végső állapotban megkapjuk a degenerált négyszöget, amelyiknek két oldala az MQ és NP éppen 0-val egyenlő, az MN és PQ oldalai pedig a téglalap átlójával, ami éppen 15 cm. Ezek szerint a minimális kerület 2×15=30 cm.

5. példa: Egy 30 cm oldalú négyzet négy sarkából vágjunk le négy egybevágó négyzetet úgy, hogy a lap négy szélének a felhajtásával a lehető legnagyobb térfogatú dobozt kapjunk! Adjuk meg ennek a térfogatát!

Megoldás: Jelöljük x-el a levágandó kis négyzet oldalának a hosszát. A doboz méretei a mellékelt ábrán láthatók. Ennek a térfogata $V=(30-2x)^2 x$ ahol 0<x<15. Ekkor felírható, hogy $4V=(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x$, és mivel $30-2x+30-2x+4x=$ $=60=$ *állandó* , ezért az $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ egyenlőtlenség alapján $\sqrt[3]{4V}=\sqrt[3]{(30-2x)\cdot(30-2x)\cdot 4x}\leq\frac{60}{3}=20.$ Így hát $V_{\max}=$ $=20\cdot 20\cdot 5=2000$ és egyenlőség csak $30-2x=4x\Leftrightarrow x=5$ esetben áll fenn.

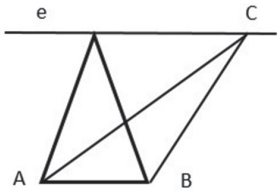
6. példa: Adott egy e egyenes és egyik az egyik oldalán két különböző pont, A és B. Szerkesszük meg az e egyenesen azt a P pontot, mely esetén az APB törött vonal hossza minimális **(Héron problémája, vagy tükrözési elv).**

Megoldás: Bebizonyítsuk, hogy azon P pontra minimális az összeg, amelyre, *ėPA=ėPB*



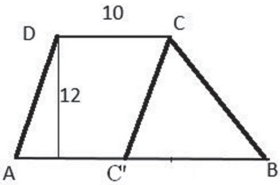
A B pontot tükrözve az e egyenesre, a B' pontot kapjuk, amire igaz, hogy AP+PB=AP+PB', így az AP+PB', minimuma pedig úgy áll elő, hogy P rajta van AB'-n amikor is $\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{P_2} = \overrightarrow{P_3}$. Másfelől, ha N az e egyenesnek a P ponttól különböző pontja, akkor megmutatjuk, hogy NA+NB>PA+PB. valóban, mivel NA=NA' és AP=AP', a fenti reláció A'N+NB>A'B-vel egyenértékű, ez pedig a háromszög egyenlőtlensége alapján igaz.

7. példa: Bizonyítsuk be, hogy az egyenlő alapú, és egyenlő területű háromszögek közül az egyenlő szárúnak a legkisebb a kerülete.



Megoldás: Legyen az A és B pont a két rögzített pont. Mivel az ABC háromszög területe állandó, ezért a C csúcs egy olyan e egyenesen mozog, amelyik párhuzamos az AB egyenessel. Ha a CA+CB összeg minimális, akkor a tükrözési elv szerint *ACe=BCe*, ez pedig csak CA=CB esetben lehet igaz.

8. példa: Legalább mekkora annak a trapéznak a kerülete, amelynek alapjai 10 cm és 20 cm hosszúak, magassága pedig 12 cm?



Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit és számadatait használva, a trapéz kerülete helyett elegendő megkeresni a DA + CB szakaszösszeg legkisebb értékét. Ebből a célból csúsztassuk el párhuzamosan a trapéz DA szárát a CC' helyzetbe. Ekkor tehát a BCC' töröttvonal minimumát kell megállapítani. vegyük észre, hogy ezúttal is alkalmazható a tükrözési elv, miszerint a BC+CC' összeg akkor lesz minimális, ha CB=CC'. Ekkor kiszámolva Pitagorasz tétellel a trapéz szárát azt kapjuk, hogy BC=AD= 13 cm. Így hát a trapéz legkisebb trapézkerület 56 cm×cm.

9. példa: Határozzuk meg az $f : R \to R$, $f(x) =$

$= \sqrt{x^2 - 8x + 41} + \sqrt{x^2 - 2x + 37}$ függvény minimum helyét!

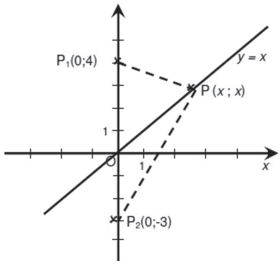
Megoldás: A függvény így is felírható: $f(x) = \sqrt{(x-4)^2 + 5^2} +$

$+ \sqrt{(x-1)^2 + 6^2}$ Tekintsük a következő pontokat: M(x,0); A(4,-5);

B(1,-6). Vegyük észre, hogy $f(x)=MA+MB$, ahol M(x,0) az Ox tengely egy változó pontja. Tehát ennek az összegnek a minimumát kell meghatározni. A tükrözési elv szerint ez az összeg akkor minimális, ha MA=MB, vagyis $\sqrt{x^2-8x+41}=\sqrt{x^2-2x+37}$ ahonnan $x=\frac{2}{3}$ adódik, ami éppen a keresett minimumhely.

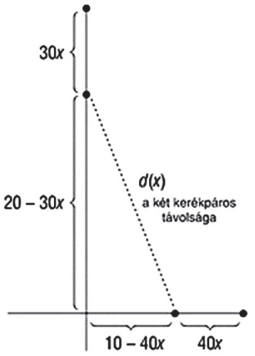
10. példa: Mennyi az $f(x)=\sqrt{2x^2-8x+16}+\sqrt{2x^2+6x+9}$ függvény minimua, ha $x\in R$.

Megoldás: Az adott függvény még így is felírható: $f(x)=\sqrt{x^2+(x-4)^2}+\sqrt{x^2+(x+3)^2}$.



Ez nem más, mint az $x=y$ egyenletű egyenesen elhelyezkedő $P(x,x)$ pontnak a távolságainak az összege a $P_1(0,4)$ és $P_2(0,-3)$ pontoktól vagyis $f(x)=|PP_1|+|PP_2|$. Minimizálni ezt az értéket azt jelenti, hogy megkeresni az $y=x$ egyenesen a P pontnak azon helyzetét, amelyre a $|PP_1|+|PP_2|$ összeg a lehető leg kisebb. Belátható, hogy ez akkor a leg kisebb, ha P éppen egybeesik az O origóval, tehát $f(x)\geq f(0)=4+3=7$.

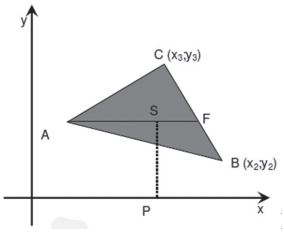
11. példa: Két, egymásra merőleges úton a kereszteződés felé egyenletes sebességgel halad két kerékpáros. Egyszerre indultak, az egyik 30 km/h sebességgel 20 km távolságból, a másik 40 km/h sebességgel 10 km távolságból. Mikor és hol lesznek egymáshoz a legközelebb?



Megoldás: Legyen a keresett idő órában mérve x. Ekkor az egyik úton haladó kerékpáros 30x km-t tett meg, míg a másik kerékpáros által megtett út hossza 40x km lesz. A két kerékpáros aktuális távolságát Pitagorasz tételének alkalmazásával számolhatjuk: $d(x)=\sqrt{(20-3x)^2+(10-40x)^2}$.

Legyen $d^2(x) = f(x) = 2500\left(x - \frac{2}{5}\right)^2 + 100$. A függvénynek $x = \frac{2}{5}$ nél lesz minimuma, az az a két kerékpáros $\frac{2}{5}$ óra = 24 perc múlva lesz a legközelebb egymáshoz. Ez a minimális távolság $\sqrt{100} = 10$ km lesz. Ekkor a 40 km/h sebességgel haladó kerékpáros már áthaladt a kereszteződésen.

12. példa: Adott az *ABC* háromszög és síkjában az *e* egyenes. Keressük az e egyenes azon P pontját, amelyre $PA^2+PB^2+PC^2$ minimális!



Megoldás: Helyezzük az ábrát koordináta rendszerbe! Speciálisan az e egyenes legyen az x tengely! A keresett P koordinátái: $P(x;0)$. Írjuk fel koordinátákkal a szóban forgó távolságok négyzetösszegét: $f(x) = PA^2 + PB^2 + PC^2 =$

$$= (x-x_1)^2 + y_1^2 + (x-x_2)^2 + y_2^2 + (x-x_3)^2 + y_3^2 =$$

$$= 3x^2 - 2(x_1+x_2+x_3)x + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 \ .$$

Az f függvénynek minimuma van, és ezt a minimumot az $x = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}$ értékre veszi fel, melyből látható, hogy a keresett *P* pont nem más, mint az *ABC* háromszög *S* súlypontjának az *e*-re bocsátott merőleges vetülete.

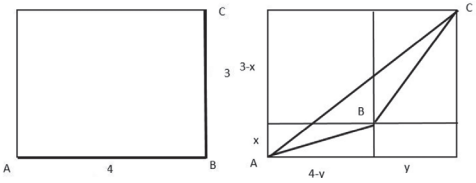
13. példa: Keressük meg az $E = \sqrt{x^2+(4-y)^2} + \sqrt{y^2+(3-x)^2}$ kifejezés szélsőértékeit, ha $x \in [0,3]$, $y \in [0,4]$!

Megoldás: Tekintsük a 3 és 4 oldalhosszú téglalapot. Annak oldalain vegyük fel az x és 3-x valamint y és 4-y távolságokat, amint a mellékelt ábra mutatja. Ekkor lássuk be, hogy

$$\sqrt{x^2+(4-y)^2} + \sqrt{y^2+(3-x)^2} = AB + BC \geq AC =$$

$$= \sqrt{(x+3-x)^2 + (y-4-y)^2} = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

hiszen az ABC töröttvonal mindig hosszabb vagy egyenlő az AC szakasszal.



Másfelől figyeljük meg, hogy az ABC töröttvonal akkor lesz a leghosszabb, ha a B csúcs lekerül a téglalap jobb alsó sarkába (lásd a második ábrát). Ezért $\sqrt{x^2+(4-y)^2}+\sqrt{y^2+(3-x)^2}\le 4+3=7$.

14. példa: Ha A, B, C egy háromszög szögei, akkor mennyi a $E=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$ szorzat maximuma?

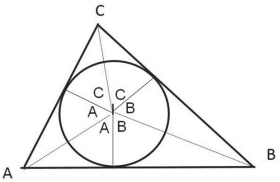
Megoldás: Összeggé alakítva az első szorzatot rendre felírható, hogy: $E=\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\le$ $\le\frac{1}{2}\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}$. Továbbá a számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján $\left(1-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\le\left(\frac{1-\sin\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$, tehát $E\le\frac{1}{8}$ és egyenlőség csak az $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

15. példa: Melyik hegyesszögű ABC háromszögre a legkisebb az $F = tgA \cdot tgB \cdot tgC$ szorzat értéke?

Megoldás: A számtani és mértani közepek egyenlőtlensége alapján felírható, hogy $\frac{tgA+tgB+tgC}{3}\ge\sqrt[3]{tgA\cdot tgB\cdot tgC}$, de, $tgA+tgB+tgC=tgA\cdot tgB\cdot tgC$ ezért azonnal kapjuk, hogy

$tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$, egyenlőség $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben áll fenn.

16. példa: Adott kör köré írható háromszögek közül melyiknek a legkisebb a területe?

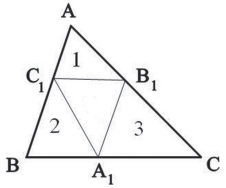


Megoldás: Az általánosság csorbítása nélkül feltételezhető, hogy az adott kör sugara egységnyi. Ekkor, a mellékelt ábra jelöléseivel felírható, hogy: $AB = tgA + tgB$, $BC = tgB + tgC$, $CA = tgC + tgA$. Ekkor az ABC háromszög területe egyenlő:

$$T = \frac{1}{2}\left(tgA + tgB + tgB + tgC + tgC + tgA\right) = tgA + tgB + tgC =$$

$= tgA \cdot tgB \cdot tgC$ és már láttuk, hogy $tgA \cdot tgB \cdot tgC \geq 3\sqrt{3}$. Egyenlőség az $A = B = C = \frac{\pi}{3}$ esetben, vagyis egyenlő oldalú háromszögben áll fenn.

17. példa: A T területű általános $A_1B_1C_1$ háromszögbe egy háromszöget írunk. Mennyi ennek a háromszög területnek a maximuma?



Megoldás: A mellékelt ábra jelöléseit használva igazoljuk, hogy ha $BA_1 = p \cdot A_1C$, $CB_1 = q \cdot B_1A$, $CC' = r \cdot C'A$, akkor igaz, hogy $T(A_1B_1C_1) = \frac{1 + pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)} T(ABC)$. Valóban, felírható, hogy $T(A_1B_1C_1) = T - T_1 - T_2 - T_3$ (*) ahol T=T=ABC). Továbbá. $T_1 = \frac{AC_1 AB_1 \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}\frac{AC \cdot AB \cdot \sin A}{2} = \frac{r}{1+r}\frac{1}{1+q}T$.

Teljesen hasonlóan kapjuk, hogy $T_2 = \frac{p}{1+p}\frac{1}{1+r}T$, $T_3 = \frac{q}{1+q}\frac{1}{1+p}T$.

Ezeket behelyettesítve az (1) összefüggésbe, a műveletek elvégzése után éppen a jelzett összefüggés adódik.

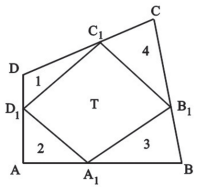
De $1+p\geq 2\sqrt{p}$, $1+q\geq 2\sqrt{q}$, $1+r\geq 2\sqrt{r}$, ezért

$\frac{1+pqr}{(1+p)(1+q)(1+r)}\leq\frac{1+pqr}{8\sqrt{pqr}}\leq\frac{1}{4}$, hiszen $\left(1-\sqrt{pqr}\right)^2\geq 1$, így hát

$T(A_1B_1C_1)\leq\frac{1}{4}T(ABC)$**.** Egyenlőség p=q=r=1 esetben áll fenn, amikor az A_1, B_1, C_1 pontok éppen oldalfelező pontok.

18. példa: Az ABCD konvex négyszög AB, BC, CD, DA oldalain felvesszük rendre az A_1, B_1, C_1, D_1 pontokat úgy, hogy $\frac{AA_1}{A_1B}=\frac{BB_1}{B_1C}=\frac{CC_1}{C_1D}=\frac{DD_1}{D_1A}=k>0$. Ha az ABCD négyszög területe állandó, és az A_1, B_1, C_1, D_1 négyszög területe T, határozzuk meg a T legkisebb értékét!

Megoldás: $T_1=\frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(DAC)$, $T_3=k$ $=\frac{k}{k+1}\frac{1}{k+1}T(BAC)$ így $T_1+T_3=\frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$.



Teljesen $T_2+T_4=\frac{k}{(k+1)^2}T(ABCD)$ hasonlóan.

Továbbá $T=T(ABCD)-(T_1+T_2+T_3+T_4)=\frac{k^2+1}{k^2+2k+1}T(ABCD)$ és $\frac{k^2+1}{k^2+2k+1}\geq\frac{1}{2}\Leftrightarrow(k-1)^2\geq 0$. Egyenlőség k=1 esetben áll fenn, amikor is A_1, B_1, C_1, D_1 oldalfelező pontok, és paralelogramma.

3. Függvények szélsőértéke

Ebben a részben egy, vagy többváltozós elemi függvény szélsőértékeit határozzuk meg, elemi módszerekkel. A továbbiakban a módszerek változatosságára szeretnénk figyelmet fordítani.

1. példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}}$ függvény minimumát, ha $x\in R$.

Megoldás: Felírható, hogy

$$f(x)=\frac{x^2+1+1}{\sqrt{x^2+1}}=\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\geq 2 \quad \text{mert} \quad a+\frac{1}{a}\geq 2 \quad \text{min-}$$

den $a>0$ esetén, és egyenlőség $\sqrt{x^2+1}=1\Leftrightarrow x=0$ esetben áll fenn.

2. példa: Határozzuk meg az, $f:R_+\to R$, $f(x)=\dfrac{4}{x^2}+x$ függvény legkisebb értékét!

Megoldás: Mivel $\dfrac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ minden $a>0$, $b>0$, $c>0$ esetén, és egyenlőség csak az $a = b = c$ esetben áll fenn, ezért az $a=\dfrac{4}{x^2}$, $b=c=\dfrac{x}{2}$ választással $f(x)\geq 1$ adódik, és egyenlőség a $\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x}{2}\Leftrightarrow x^3=8\Leftrightarrow x=2$ esetben áll fenn.

3. példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{3x^2+18x+23}{x^2+6x+10}$ függvény maximumát, ha $x\in R$.

Megoldás: felírható, hogy $f(x)=\dfrac{3(x^2+6x+10)-7}{x^2+6x+10}=3-$

$=3-\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ és ez akkor minimális, ha $\dfrac{7}{x^2+6x+10}$ maximális, és ez akkor igaz, ha $x^2 + 6x + 10$ minimális, de ez akkor igaz, $x=-\dfrac{b}{2a}=-3$ ha, így hát.

4. példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^4+2x^3+3x^2+2x^2+2x+2}{x^2+x+1}$ függvény minimumát, ha $x\in R$!

Megoldás: Felírható, hogy,

$$f(x)=\frac{(x^2+x+1)^2+x^2+x+1}{x^2+x+1}=x^2+x+1+\frac{1}{x^2+x+1}\geq 2$$

és egyenlőség csak az $x^2+x+1=1$, vagyis $x\in\{0,-1\}$ esetben áll fenn.

5. példa: Határozzuk meg az $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ függvény szélsőértékeit, ha $x\in R$.

Megoldás: Legyen $\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}=y$, ahonnan $(y-1)x^2-x+y-1=0$ valós x esetén teljesül, ezért, $\Delta\geq 0$ ami alapján $4y^2-8y+3\leq 0$ vagyis $y\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$.

6. példa: Határozzuk meg az, $f:[0,5]\to R$, $f(x)=\dfrac{2x^2-9x-11}{x^2-5x-6}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Felírható, hogy $f(x)=\dfrac{2(x^2-5x-6)+x+1}{x^2-5x-6}=2+$ $+\dfrac{x+1}{(x-6)(x+1)}=2+\dfrac{1}{x-6}$. És mivel az $x\to\dfrac{1}{x-6}$ függvény szigorúan csökkenő, ezért $1=f(5)\leq f(x)\leq f(0)=\dfrac{11}{6}$.

7. példa: Határozzuk meg az, $f:[0,1]\to R$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vizsgáljuk meg a függvény monotonitását. Legyen $\alpha>\beta>0$. Ekkor felírható, hogy ami azt jelenti, hogy az f

$$f(\beta)-f(\alpha)=\frac{\alpha^2(1+\beta)-\beta^2(1+\alpha)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}=\frac{(\alpha^2-\beta^2)+\alpha\beta(\alpha-\beta)}{(\alpha^2+\alpha+1)(\beta^2+\beta+1)}>0$$

függvény szigorúan csökkenő, ezért $\frac{2}{3} = f(1) \le f(x) \le f(0) = 1$.

8. példa: Határozzuk meg az, $f : R \setminus \{1\} \to R$, $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{2x - 2}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Vegyük észre, hogy $f(x) = \frac{1}{2}\left(x - 1 + \frac{1}{x-1}\right)$ és az $a + \frac{1}{a} \ge 2$ minden $a > 0$ esetén alapján, ha $x>1$, akkor $f(x) \ge 1$. Ellenben, ha $x<1$, akkor mivel $f(x) = \frac{x^2}{2(x-1)}$ és $\frac{x^2}{2(x-1)}$ szigorúan csökkenő, ezért $\frac{x^2}{2(x-1)} - 1 \le -1$ és egyenlőség csak $x=0$ esetben áll fenn. Vegyük észre, hogy az $m=1$ a függvénynek csak lokális minimuma, úgyszintén az $M=-1$ is csak lokális maximuma.

9. példa: Határozzuk meg az $f(x) = \sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x \in R$!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért az $a = \sqrt{x-3}$ és $b = \sqrt{7-x}$ és választással felírható, hogy: $\sqrt{\frac{x-3+7-x}{2}} \ge \frac{\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x}}{2}$ vagyis, $\sqrt{x-3} + \sqrt{7-x} \le 2\sqrt{2}$ egyenlőség akkor áll fenn, ha, $x - 3 = 7 - x$ vagyis $x = 5$. Másfelől, $f^2(x) = 4 + 2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{7-x} \ge 4$ és egyenlőség akkor áll fenn, ha $x = 3$ vagy $x = 7$.

10. példa: Határozzuk meg az $f(x) = 5\sin x + 12\cos x$ kifejezés legkisebb és legnagyobb értékét, ha $x \in R$!

Megoldás: Ismert a Cauchy-Buniakovsky-Schwarz féle egyenlőtlenség sajátos esete, miszerint:

$(aA+bB)^2 \le (a^2+b^2)(A^2+B^2)$.

Ha most $a=\sin x$, $b=\cos x$, A=5, $B=12$, akkor,

$f^2(x) \le \left(5^2+12^2\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=13^2$ ahonnan, $|f(x)| \le 13$, ezért $-13 \le f(x) \le 13$.

11. példa: Adjuk meg az $f(x)=\sin^8 x+\cos^8 x$ függvény szélsőértékeit, ha $x \in R$!

Megoldás: Végezzük el az alábbi átalakításokat: $f(x)=(\sin^4 x+\cos^4 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$.

Ellenben, $1=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=\sin^4 x+\cos^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x$ így felírható, hogy $f(x)=(1-2\sin^2 x\cos^2 x)^2-2\sin^4 x\cos^4 x=$

$=\frac{1}{8}\sin^4 2x-\sin^2 2x+1$. Vezessük most be $\sin^2 2x=a$ változócserét.

Így a $g(a)=\frac{1}{8}a^2-a+1=\frac{1}{8}(a-4)^2-1$ függvény szélsőértékeit kell meghatároznunk, ahol $0 \le a \le 1$. De mivel az a változó nem veheti föl az 4 értéket, ezért a g függvény esetén nem írható fel, hogy $\frac{1}{8}(a-4)^2-1 \ge -1$ hanem arra következtethetünk, hogy a g függvény parabolájának a csúcsa a $V(4,-1)$ pontban van, és mivel $a \le 1$, ezért $a<4$, vagyis a parabolának csak a baloldali leszálló ágáról van szó, ahol a g függvény monoton csökkenő a [0,1] intervallumon, ezért $\frac{1}{8}(a-4)^2-1 \ge -1$ és ezek adják egyben az f függvény szélsőértékeit is.

12. példa: Határozzuk meg az $f:[0,1] \to R$, $f(x)=2^x 3^{1-x}+3^x 2^{1-x}$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \geq \frac{a+b}{2}$ és egyenlőség csak az $a=b$ esetben áll fenn, ezért $\frac{f(x)}{2} = \frac{2^x 3^{1-x} + 3^x 2^{1-x}}{2} \geq \sqrt{2^x 3^{1-x} 3^x 2^{1-x}} = \sqrt{6}$ vagyis $f(x) \geq 2\sqrt{6}$.

Egyenlőség $2^x 3^{1-x} = 3^x 2^{1-x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{1-x} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ esetben áll fenn. Másfelől becsüljük meg az f(x)-5 különbséget! felírható, hogy:

$$f(x)-5 = 3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 2\left(\frac{3}{2}\right)^x - 3 - 2 = \frac{(3\cdot 2^{2x} - 3\cdot 3^x 2) + (2\cdot 3^x - 2\cdot 2^x 3^x)}{6^x} =$$

$$= \frac{3\cdot 2^x (2^x - 3^x) - 2\cdot 3^x (2^x - 3^x)}{6^x} = (2^x - 3^x)\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{2}{3}\right) 3^{x+1} \leq 0 \quad \text{ha}$$

$x \in [0,1]$, ezért $f(x) \leq 5$. Egyenlőség x=0 vagy x=1 esetben áll fenn.

13. példa: Határozzuk mg az $f(x) = ax^m + \frac{b}{x^n}$ függvény minimumát, ha a, b, x, m, n>0 és m, n természetes számok!

Megoldás: Írjuk fel a számtani és mértani közepárányosok közötti egyenlőtlenséget m+n tag esetén, a következő választással:

$$\frac{\left(\frac{ax^m}{n} + \frac{ax^m}{n} + \ldots + \frac{ax^m}{n}\right) + \left(\frac{b}{mx^n} + \frac{b}{mx^n} + \ldots \frac{b}{mx^n}\right)}{n+m} \geq$$

$$\geq \sqrt[m+n]{\frac{a^n}{n^n}(x^m)^n \frac{b^m}{m^m}\frac{1}{(x^n)^m}} = \left[\left(\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$$

Tehát $f(x) \geq (m+n)\left[\left(\frac{a}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{b}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{m+n}}$, vagyis ez utóbbi kifejezés

az f függvény minimuma, és ezt az $\frac{ax^m}{n} = \frac{b}{mx^n} \Leftrightarrow x^{m+n} = \frac{nb}{ma} \Leftrightarrow x =$ $= \left(\frac{nb}{ma}\right)^{\frac{1}{m+n}}$ esetben veszi föl.

14. példa: Határozzuk meg az $f : R \to R,\ f(x) = x^5 - 5x^4 + 11$ függvény szélsőértékeit!

Megoldás: Nyilvánvaló, hogy az $f(x) = x^5 - 5x^4 + 11$ függvénynek akkor vannak szélsőértékei, mint amikor a $g(x) = x^5 - 5x^4 =$ $= x^4(x-5)$. Ennek a szélsőértékeit könnyen meghatározhatjuk, ha meghatározzuk a $h(x) = -g(x) = x^4(5-x)$ függvény szélsőértékeit. Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek egyenlőtlenségét a következő választással: $1 = \frac{\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+\frac{x}{4}+(5-x)}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{x^4(5-x)}{4^4}}$ vagyis $h(x) \leq 4^4 = 256$. Egyenlőség $\frac{x}{4} = 5 - x \Leftrightarrow x = 4$ esetben áll fenn, ekkor h-nak helyi maximuma, így f-nek minimuma van, és minf(x)= f(4)= -245. Másfelől, ha $x \leq 0$ akkor a h függvénynek helyi minimuma van, hiszen $x^4(5-x) \geq 0$ és egyenlőség x=0 esetben áll fenn, ez lesz az f maximum helye, amelyre maxf(x)=f(0)=11.

15. példa: Mennyi az $a \cdot b$ minimuma, ha $a > 0$, $b > 0$ és $5a + 7b = 1$?

Megoldás: Mivel minden $x > 0$, $y > 0$ esetén $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x = y$ esetben igaz, ezért $\frac{1}{2} = \frac{5a+7b}{2} \geq \sqrt{35ab}$, ahonnan $ab \leq \frac{1}{140}$, egyenlőség $5a = 7b$ esetben igaz, az $5a + 7b = 1$ alapján $a = \frac{1}{10}$ és $b = \frac{1}{14}$ esetben áll fenn.

16. példa: Ha, $x^2 + y^2 = 1$ akkor határozzuk meg az $E = 2x + 3y$ kifejezés szélsőértékeit!

Megoldás: Legyen $2x + 3y = p$ és az $x^2 + y^2 = 1$ összefüggés alapján, mivel, $x = \frac{p-3y}{2}$ ezért $13y^2 - 6py + p^2 - 4 = 0$ megoldható a valós számok halmazán, ezért $\Delta \geq 0$, ahonnan $p^2 \leq 13 \Leftrightarrow -13 \leq p \leq 13$.

17. példa: A Descartes-féle síkbeli derékszög_ koordinátarendszer mely pontjaira teljesül, hogy $x^2 + y^2 = 1$ és $|x+y|$ maximális?

Megoldás: Ismert az abszolút érték háromszög egyenlőtlensége, miszerint $|x+y| \leq |x|+|y|$ és egyenlőség akkor áll fenn, ha a két szám egyforma előjelű. Továbbá a számtani és négyzetes középarányosok egyenlőtlensége alapján felírható, hogy:

$$\frac{|x+y|}{2} \leq \frac{|x|+|y|}{2} \leq \sqrt{\frac{|x|^2+|y|^2}{2}} = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Egyenlőség azokra a számpárokra áll fenn, amelyekre az $|x| = |y|$ és x, y azonos előjelű, és $x^2 + y^2 = 1$. Ezért a feltételnek eleget tevő számpárok $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Ezekre az értékekre lesz a $|x+y|$ maximális.

18. példa: Mennyi az $E = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$ kifejezés minimuma, ha $x > 1$, $y > 1$? ?

Megoldás: Végezzük el az $a=x-1$ és $b=y-1$ változócserét. Ekkor, az $\sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geq \frac{x+y}{2}$ egyenlőtlenség alapján

$$\frac{E}{2}=\frac{\frac{(a+1)^2}{b}+\frac{(b+1)^2}{a}}{2}\geq\sqrt{\left(a+\frac{1}{a}+2\right)\left(b+\frac{1}{b}+2\right)}\geq\sqrt{4\cdot 4}=4,$$

ugyanis $a+\frac{1}{a}\geq 2$ és, így $E\geq 8$, Egyenlőség $a = b = 1$ vagyis $x = y = 2$ esetben áll fenn.

19. példa: Határozzuk meg az

$$E=\frac{(p^2+p+1)(q^2+q+1)(r^2+r+1)(s^2+s+1)}{pqrs}$$ kifejezés minimumát, ha $p, q, r, s > 0$.

Megoldás: Mivel $a+\frac{1}{a}\geq 2$ minden $a > 0$ esetén, ezért $\frac{x^2+x+1}{x}=1+x+\frac{1}{x}\geq 3$, így hát $E\geq 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=81$, egyenlőség $p=q=r=s=1$ esetben áll fenn.

20. példa: Mennyi az $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ minimuma, ha $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$?

Megoldás: Mivel minden $x > 0$, $y > 0$ esetén $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$ és egyenlőség csak $x = y$ esetben igaz, ezért felírható, hogy: $\frac{a+b}{2}\frac{b+c}{2}\frac{c+a}{2}\geq\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca}=abc$ ezért

$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}\geq 8$ és egyenlőség az $a = b = c$ áll fenn.

21. példa: Ha $a,b,c\geq-\frac{1}{2}$ és $a+b+c=1$, akkor mennyi az $E=\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}$ kifejezés maximuma illetve minimuma?

Megoldás: Mivel $\sqrt{\frac{x^2+y^2+z^2}{3}} \geq \frac{x+y+z}{3}$ és egyenlőség az $x = y = z$ esetben áll fenn, ezért

az $x=\sqrt{2a+1}$, $y=\sqrt{2b+1}$, $z=\sqrt{2c+1}$ esetben felírható, hogy, $\sqrt{\frac{5}{3}} \geq \frac{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2b+1}+\sqrt{2c+1}}{3}$ ahonnan, $E \leq \sqrt{15}$ egyenlőség $a=b=c=\frac{1}{3}$ esetben áll fenn. Másfelől felírható, hogy $E^2 \geq 5+2\left(\sqrt{2a+1}\sqrt{2b+1}+\sqrt{2b+1}\sqrt{2c+1}+\sqrt{2c+1}\sqrt{2a+1}\right) \geq 5$

vagyis $E \geq \sqrt{5}$. Egyenlőség akkor áll fenn, ha a három szám közül kettő $-\frac{1}{2}$-el egyenlő, a harmadik pedig az $a + b + c = 1$ alapján *2*-vel egyenlő.

22. példa: Az x, y, z valós számokra teljesülnek az $x + y + z = 4$ és az $xy + yz + zx = 4$ egyenlőségek. Milyen korlátok között változhatnak az x, y, z számok?

Megoldás: Az egyenletrendszer így is felírható: $x + y = 4 - z$ és $xy = 4 - z(x + y)$ vagyis $x + y = 4 - z$ és $xy = 4 - 4z + 4z^2$. Képezzük azt a másodfokú egyenletet, amelynek a gyökei: x, y : $t^2 - (4-z)t + 4 - 4z + z^2 = 0$. Mivel az egyenletnek valós gyökei kell legyenek, ezért $\Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow z \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$. És mivel az eredeti egyenlet rendszer szimmetrikus az x, y, z -ben, ezért igaz az is, hogy $x \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$ és $y \in \left[0, \frac{8}{3}\right]$.

23. példa: Határozzuk meg az $f(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}$ függvény minimumát, ha $x>0$, $y>0$ és $z>0$ valós számok!

Megoldás: Alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget 6 tag esetén, a következő választással:

$\dfrac{x+\frac{y}{2}+\frac{y}{2}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}+\frac{z}{3}}{6}\geq\sqrt[6]{x\dfrac{y^2}{4}\dfrac{z^3}{27}}$ ahonnan

$f(x,y,z)=\dfrac{(x+y+z)^6}{xy^2z^3}\geq 2^4 3^3$. Egyenlőség az $x=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{3}$ esetben áll fenn.

Szakirodalom

[1] Nicholas D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek, Gondolat Kiadó, 1980

[2] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek, Dacia Könyvkiadó, Cluj-Napoca, 1988

[3] Major Zoltán: Egy izgalmas szélsőértékfeladat-család, Graphisoft Kft, 1993

[4] Vigné Dr. Lencsés Ágnes: A problémamegoldó képesség fejlesztése szélsőérték feladatok megoldásával, 2007 (tanulmány)

[5] Kapitány Benedek: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)

[6] Kapitány Benedek: Az izoperimetrikus egyenlőtlenség, ELTE, 2013 (szakdolgozat)

[7] Ábrahám Gábor: Szélsőérték feladatok elemi megoldása 2013 (http://matek.fazekas.hu/images/cikkek/20130112_cikkek_abrahamgabor_szelsoertekelemi.pdf)

[8] Berzsenyi Viktória: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2010 (szakdolgozat)

[9] Lengyel Csilla Mária: Szélsőérték-feladatok különböző megoldási módszerei, ELTE, 2012 (szakdolgozat)

[10] Hódi Endre: Szélsőérték-feladatok elemi megoldása, Typotex, Budapest, 1994

Wiersumné Dr. Gyöngyösi Erika emlékei

Tudományos munkám Dr. Ambrus Andrással és az ebből származó előnyök

1999-ben kezdtem el doktori tanulmányaimat a Debreceni Egyetemen, amit akkor Kossuth Lajos Tudományegyetemnek hívtak. A matematika-pedagógia tanár és angol-magyar szakfordító szakos diplomám átvétele után azonnal jelentkeztem a Matematika-Didaktika Doktori Iskolába, ahová felvételt is nyertem.

Szeretném megemlíteni Dr. Lajkó Károly tanár úr nevét is, aki hozzájárult ahhoz, hogy analízistudásom tökéletesítsem, és ne hagyjam ott az egyetemet már az első év végén, amikor kudarcok értek az analízis tárgy teljesítése közben. Azóta is hálás szívvel gondolok Lajkó tanár úrra, aki a Doktori Iskolában is vezető szerepet töltött be, nemcsak az én egyetemi tanulmányaimban. Végül annyira megszerettem az analízist, hogy ezt a témát választottam szakdolgozatom témájának is Lajkó tanár úr témavezetésével. Azóta is nagyon sok tanítványt segítek hozzá a sikeres analízis vizsgához az ország különböző egyetemein.

A doktori iskolában Dr. Bácsó Sándor tanár urat választottam témavezetőmnek és először a pedagógus továbbképzéssel kezdtem el foglalkozni. Sikerült már elsős doktorandusz hallgatóként Erasmus ösztöndíjat nyerni és a franciaországi Toulouse-ban kutatómunkát végeznem 9 hónapon keresztül Itt megismerkedtem a francia felsőoktatási rendszerrel, konferenciákra jártam, megtanultam középfokon beszélni a francia nyelvet és lehetőségem volt doktori védést is hallgatnom matematikából. Hazatérve, a látóköröm kitágult és témakört változtattam. Dr. Bácsó Sándor tanár úr mutatott be Dr. Ambrus András tanár úrnak, aki már akkor nagy szakértőjének számított a matematika didaktika témakörének is. Ezután kezdte el Dr. Ambrus András tanár úr csiszolni a matematika módszertani tudásomat. Debrecenben tartott matematika módszertani kurzu-

sokat, amikre mindig nagy örömmel mentem, mert tudtam, látóköröm tágulni, tudásom bővülni fog. A doktori dolgozatom ekkor már elkezdtem írni és a publikációs tevékenységem bővítéséhez is nagyban hozzájárult Ambrus tanár úr segítő kritikája, amivel javítani tudtam a kutatómunkám minőségét és nemzetközileg elfogadott folyóiratokban sikerült publikálnom. A doktori disszertációm címe: Számítógéppel segített matematikaoktatás: lehetőségek és veszélyek.

Bizony volt, hogy elakadtam a kutatás rögös útján és Ambrus tanár úr segített kibontakoztatni a képességeimet és továbblépni a kutatásaimban. Megtanultam esettanulmányt írni Ambrus András útmutatása alapján és a matematika didaktikai kísérleteimet is nagyobb tudatossággal tudtam végezni és helyesebb következtetéseket levonni az eredményekből.

2003-ban sikerült elnyernem először az állami Eötvös ösztöndíjat, amely lehetővé tette, hogy matematika-didaktikai kutatásaimat a londoni City Egyetemen folytassam 4 hónapon át. Az ösztöndíj elnyeréséhez megint nagyban hozzájárultak kedves tanáraim, Ambrus András és Bácsó Sándor, akik olyan színvonalas ajánlóleveleket írtak, hogy sikerült elnyernem a megpályázott ösztöndíjat. Angliában sokat haladtam a kutatómunkával és gyakorlatokat is tarthattam angolul az ottani számítógépes teremben analízis tantárgyból. Nagyon érdekes volt külföldi hallgatókkal foglalkozni és nagy kihívást jelentett egy közös idegen (angol) nyelven megértetni magam, és elmagyarázni ennek az amúgy is elvont és bonyolult tárgynak a problémáit.

Másrészt Londonban találkoztam a férjemmel is, ezért is volt sorsdöntő számomra ez az angliai út. Azóta lett három gyermekünk is és boldogan élünk, remélhetőleg amíg csak tudunk, jó sokáig.

2004-ben megvédtem a doktori disszertációmat elsőnek ebben a Doktori Iskolában summa cum laude eredménnyel. Ez a kiváló eredmény is sokat számított a 2017-ben megpályázott és az Emberi Erőforrások Minisztériuma által az Új Nemzeti Kiválóság Programok keretében meghirdetett kutatói ösztöndíjnak az elnyerésében.

Szeretnék ezúton is köszönetet mondani kedves tanáraimnak, oktatóimnak, akik hozzájárultak sikeres kutató és későbbi oktató munkámhoz további nevek említése nélkül, mert nem szeretnék

senkit kihagyni az igen hosszú listáról. Azóta is hálás szívvel gondolok a Kossuth Lajos Tudományegyetemre, amit ma Debreceni Egyetemnek hívnak, ahol diplomámat szereztem és doktoráltam.

A jelenlegi munkahelyemen, az Eszterházy Károly Egyetem Sárospataki Comenius Campusán, ami már több névváltozáson esett át és több különböző egyetemhez csatolták az évek során, 2004-ben kezdtem el tanítani.

Itt tanítok matematikát, tanításmódszertant, pedagógiai tárgyakat és matematika tárgyakat angol nyelven is. 2006-ban megszületett az első fiam, így otthon maradtam vele két évig, a második gyermekem születéséig és még két évig. Ezalatt megírtam 4 tankönyvet angol nyelven a két tanítási nyelven tanuló diákjaimnak, mert a sárospataki Református Gimnáziumban is voltam évekig óraadó és a diákok panaszkodtak, hogy nincs tankönyvük, amiből tanulhatnák mind a matematikát, mind a szaknyelvet. Ezután megírtam az érettségire készülőknek egy két kötetes feladatgyűjteményt, megoldó CD-vel angol nyelven. 2010-ben másodjára is elnyertem az állami Eötvös ösztöndíjat, a szintén kitűnő ajánlóleveleknek köszönhetően, amiket szintén Ambrus András és Bácsó Sándor tanáraimtól kaptam. Második kutatói ösztöndíjamat Dániában töltöttem, szintén 4 hónapot. Itt is analízistanítással kapcsolatos kutatómunkában vettem részt. Azt vizsgáltuk, hogy a Maple szoftver hogyan járulhat hozzá a konvergenciával kapcsolatos fogalmak megértéséhez. Professzor Carl Winslow vezetésével folyt a kutatás és együtt írtunk cikket erről, amely meg is jelent nemzetközi lapban.

Munkahelyemen eddig nem volt lehetőségem analízist oktatni, így sajnos nem tudtam még felhasználni korábbi kutatómunkám minden eredményét, de mindig van újabb kihívás a matematikatanításban.

2013-ban megszültem harmadik gyermekemet és kutatómunkám 1 évre ismét háttérbe szorult, de aztán hamar visszamentem a munkahelyemre, ahol mindent tudtam folytatni, már más nézőpontból, nagycsaládos anyaként szemlélve a munkámat és a tanítványokat. Igen érdekes oktatóként és anyaként is látni az óvodapedagógusok és a tanítók munkáját. Jobban látom mindkét oldalt,

mivel van egy ovis fiam, egy általános iskolás lányom, aki most negyedikes és egy nagyfiam, aki hatodikos. Így látom, milyen akadályokkal küzdenek az ovisok, általános iskolások és szüleik, továbbá az óvódapedagógusok és a tanítók. Személyes tapasztalataim sokat segítenek oktatómunkám sikerességében.

Fontosabb elvek, melyeket alapvetőnek tartok a matematikatanítással kapcsolatban

- Elsőként Varga Tamás elveivel egyetértve, a matematika megszerettetését és megértetését tartom az egyik nagyon fontos elvnek. Sajnos nagyon sok olyan tanítvány kerül hozzám, akikkel már megutáltatták e tantárgyat a korábbi tanulmányai során. Először mindig megpróbálom motiválni és aktív cselekvőkké tenni a tanulóimat a matematika óráimon. Ehhez nagyon sokféle módszer áll rendelkezésre. Dán kutatásaim során lestem el az ottani oktatóktól, hogyan kell segíteni a hallgatók önkibontakoztatását és háttérben maradni az órákon, miközben a hallgatók aktívan megoldják a felvetett matematikai problémákat. Tapasztalataim alapján nagyon sokat tanulnak egymástól is a hallgatók az órákon. Előfordul, hogy az oktató is tanul valami újat. Nemcsak a matematikatudás fejlődése érhető el az aktív tanulás biztosításával, hanem az együttműködési, megértési képességeik és sok más nevelési cél is. Akkor érzem sikeresnek az óráimat, amikor mind én, az oktató, mind a hallgatók, jókedvűek az óra végére és úgy érzi mindkét fél, hogy kapott valamit a másiktól. Nem gondolok nagy dolgokra, néha egy ”értem, de jó” elszólás is elég vagy egy mosoly.

Eleinte a számítógépek és a matematikai jellegű szoftverek óriási hatásában hittem, de mára beláttam, hogy az is egy módszer és nem kizárólagos a többi között.

A mai kutatások kimutatták, hogy a digitális technológia alkalmazásának hossza nem egyenesen arányos a megszerzett tudás növekedésével.

- A matematika hozzájárulhat az emberek végső céljának, a bol-

dogságnak az eléréséhez, a sikeres boldoguláshoz mert a matematika minden más tudománynak az alapja és a mindennapi élet problémáinak megoldásában is sokat segít a logikus gondolkodás és a matematikatudás. Ezért nagyon fontos, hogy lássák a hallgatók a kapcsolatokat a matematikai és a mindennapi élet problémái között. A matematikatörténet is segít ebben, mert így megérthetjük, hogy milyen valós probléma vezetett el egy-egy matematikai kérdés felvetéséhez és megoldásához.

- Nincsenek kizárólagos tanítási módszerek, ezért bármely módszer jó lehet, ha a megfelelő időben, a megfelelő céllal alkalmazzák és tanulást érnek el vele. Ezért mindenki kiválaszthatja a hozzá legjobban illő módszereket, és ha nem fárad el az óra végén, hanem ugyanolyan lelkes marad minden óráján, az év 365 napján és nem csügged, sőt feltöltődik a tanítványai csillogó szemeinek tüzében, akkor biztosra veheti, hogy jól tanít. A humor sokszor átsegíti az oktatót és a hallgatókat is nehézségeken, ezért a viccelődés is jó módszer a tanulásban megfáradt ember feltöltődéséhez és a tanulás folytatásának megkönnyítésében.

Egy kísérlet bemutatása, elemzése, vagy egy kísérletből kiemelt „esettanulmány"

Szeretném bemutatni a Koppenhágában töltött kutatómunkám során végzett kísérletet.

2010 tavaszán utaztam ki családommal Koppenhágába 4 hónapra állami Eötvös ösztöndíjasként. Prof. Carl Winslow irányította a dán kutatómunkámat. Abban a tavaszi félévben, ő maga nem tartott analízis kurzust (Calculust) ezért megkérte Jan Philip Solovej professzort, hogy járuljon hozzá a kutatásunkhoz és vegyen részt benne.

Ezután kidolgoztunk a Maple szoftver segítségével egy feladatsort, amely segíthette a absztrakt analízis tantárgy fogalmainak szemléltetését és megértését. Az otthoni kidolgozandó feladatokba is csempésztünk a matematika és mérnök szakos hallgatók-

nak Maple segítségével megoldható feladatokat. Kutatásunk célja az volt, hogy megvizsgáljuk a computer algebra rendszerek (Maple 13) integrálásának hatásait a hallgatók munkájában, amely segítheti őket az elméleti és gyakorlat összekapcsolásában, ami a valós számok és függvények sorozatainak és sorainak konvergenciáját illeti.

A probléma lényegében az volt, hogy a legtöbb egyetemen megfigyelhető, hogy a hallgatók nagy nehézségekkel küzdenek a tanulmányaik első néhány hónapjában és ezért különböző intézkedéseket vezetnek be, amelyek megkönnyítik a beilleszkedésüket az adott intézménybe. Ilyen intézkedések egyike például, hogy az első egyetemi matematika kurzusokat hozzáigazítják a hallgatók felső középfokú iskolai tanulmányaihoz. Dániában ez azt jelenti, hogy az alapozó differenciálszámítás és integrálszámítás témaköreit újra tárgyalják és fokozatosan bővítik a többváltozós függvények esetére, néhány standard témakörrel együtt az analízis területéről. Ezek az első kurzusok a hallgatók gyakorlati képzésére fókuszálnak, konkrét számítási feladatokkal, és konkrét függvények elemzésével, miközben az elméleti rész (precíz definíciók, tételek és bizonyítások) a háttérben maradnak, vagy teljesen hiányoznak. Ha ezekre a kurzusokra még más szakos hallgatók is beiratkoznak, mint például fizika, mérnök szakosak, akkor ez még jobban indokolttá teszi ezt az intézkedést.

Bár a probléma így sem szűnik meg. A matematika szakos hallgatók hamarosan találkoznak a valós analízissel, ahol a téma szigorú tárgyalása elkerülhetetlen. Ilyen témakörök a folytonosság, konvergencia, amelyeket nemcsak elméletben tárgyalnak előadásokon, hanem önálló munkát is kapnak a hallgatók ezekkel kapcsolatban. Ezáltal két területen is kihívással kell megküzdeniük a hallgatóknak:

1) Önálló munkát kell végezniük a korábban analízisből (számítások ismert függvényekkel) tanult gyakorlati feladatokon, elméleti szempontból.

2) Új gyakorlatokkal, elméletekkel találkoznak, amelyek ezeken az elméleti elemeken alapulnak (pl. függvényterek, absztrakt metrikus terek, normák, …).

Kutatásunkban, főleg az első területtel foglalkoztunk. Azt vizs-

gáltuk, hogy segíti-e és hogyan a Maple használat a „lassabban gondolkozó" tanulókat az analízis megértésében. A hallgatók előzőleg megismerkedtek ezzel a szoftverrel és használatával, eközben is közelebb kerülve az analízis elvont fogalmainak megértéséhez, ezért úgy véltük, hogy a feltételek adottak voltak kutatásunkhoz.

Körülbelül 150 hallgató (a gyakorlatokon 6 csoportban) vett részt 2010 tavaszán a kutatásban. Bár könnyen hozzáférhettek a Maple szoftverhez, a kurzuson előzőleg nem alkalmazták azt. Ezért is csak szerényen adtunk Maple használattal megoldható feladatokat, hetente csak néhány ilyen jellegű feladatot adtunk a hallgatóknak és az otthoni feladatok körülbelül 20%-ban voltak ilyen jellegű feladatok (ezeket a hallgatók két nyomtatott példányban adták be, hozzátűzve a Maple feladatlapokat).

A kutatás fő célja az volt, hogy alapvető információkat nyerjünk arról, milyen hatást érhetünk el a MAPLE szoftveralkalmazással a valós számsorozatok és sorok konvergenciájával kapcsolatos (Taylor és Fourier-féle sorok is) feladatok megoldása során. Továbbá ösztönözni akartuk az önálló tanulást. Bár messzemenő következtetéseket nem kívántunk levonni eredményeinkből, de meg kívántuk alapozni a további hasonló kurzusok esetén a szoftverhasználat bevezetését azokon a területeken, ahol sikeresnek bizonyult, és segítette a hallgatók feladatmegoldását és a fogalmak megértését. A kísérlet eredményeit egyrészt a beadott feladatlapok, másrészt a Dániában évek óta alkalmazott, a hallgatók által kitöltött normál kurzusértékelő kérdőívek alapján elemeztünk. A kérdőíveket kiegészítettük a MAPLE használatra vonatkozó hallgatói tapasztalatokkal kapcsolatos kérdésekkel.

A hallgatók otthoni feladatainak és a kurzuson alkalmazott MAPLE használatuk alapján a vizsgált hallgatók két csoportját tudtuk megkülönböztetni:

- 'A büszke puristák': viszonylag sikeres hallgatók, akik nem gondolják, hogy egy komoly matematika kurzuson a MAPLE használatnak helye van és akik néha szándékosan úgy döntenek, hogy kihagyják a MAPLE használatát (ezt a kurzusleírás alapján büntetlenül meg lehetett tenni, ha a nem MAPLE-lel megoldható részeket helyesen oldották meg).

- 'A kihívásokkal küzdő, de segítséget nyerők': olyan hallgatók, akiknek nehézséget okozott néhány feladat megoldása, különösen az elvontabbak és a nagyobb technikai nehézséget jelentők, de akik értékelték és sikeresen használták a szoftvert azokon a részeken, ahol az használható volt és segítséget jelentett. Ez részben azért volt, mert egy oktató szerint ezek a részek könnyebbek voltak és 50%-ra emelkedett a kurzust sikeresen elvégzők száma, másrészt néhány hallgató szerint segítette a megértésüket.

Ezen eredményekből arra következtethetünk, ha opcionálissá tesszük a MAPLE használatot, akkor az első csoportba tartozó hallgatók igényei is kielégülnek. A második csoportba tartozó hallgatók igényeit és munkáját viszont alaposabban tanulmányozni kellene, ami már túlmutat ezen kutatásunkon.

Ezután visszakerültem a tanító és óvodapedagógus képzésbe, ahol már nem tudom alkalmazni az analízistudásomat és más kutatási terület felé fordultam. Tapasztalataim szerint egyre több aktívan tanító, levelező képzésben részt vevő hallgató a munkája során egyre inkább szenved a növekvő tanulói érdektelenségtől. Az általános iskola alsó tagozatára egyre több hátrányos helyzetű tanuló, vagy tanulásra nehezen rábírható tanuló kerül. Ekkor a kihívást már nem az jelenti, hogy hol, mikor és mennyi ideig alkalmazzunk digitális eszközöket (digitális tábla, okostelefonok, számítógépek, laptopok, tabletek) a tanórán, hanem egyáltalán rávegyük a tanulókat az egészséges életmódra, tisztálkodásra, higiéniára, mert ezek a tanuláshoz való alapfeltételek is sokszor hiányoznak.

Ezért jelenleg azt kutatom, hogy ha nem a kétdimenziós digitális világban csak a látó és halló érzékszervekre hagyatkozva tanítunk, hogyan lehet mégis játszva, élményszerű tanulást elérni. Ehhez egy ciprusi professzor által kitalált módszert alkalmazok, amely új kommunikációs eszközök használatára épít az oktatásban és nincs eszközigénye sem. Az egyik a 'MATHFactor' amely egy matematikai probléma elmesélését jelenti egy tanuló által, megoldással, élmény-szerűen előadva. A másik a 'MATHeatre' amely az egész osztályt mozgósíthatja, egy-egy matematikai jellegű probléma színházi előadás formájában eljátszott módon, közelebb hozva a mate-

matikai problémákat a mindennapi életben adódó problémákhoz, szemléltetve ezzel a matematikai problémamegoldás hasznosságát és szükségességét, amely nagyobb motiváló erő lehet, mint egy digitális eszköz használata, amit idővel megszoknak a tanulók és nem válik közösségi élménnyé, úgy, mint egy közösen eljátszott feladatmegoldás. Aki többet szeretne olvasni erről a nemzetközi kutatásról és eredményiről, annak ajánlom az alábbi weboldalt, amit 2017. áprilisában nyitottam meg utoljára: www.le-math.eu

Habilitációs dolgozatom megírásakor is ebbe az irányba kívánok haladni. A doktori kutatásaimat még a számítógéppel segített oktatás lehetőségeiről és veszélyeiről folytattam, de mára már annyira túlsúlyba került az Információs és Kommunikációs Technológia (IKT) eszközeinek alkalmazása, hogy ezekből kiábrándultam. Csak módjával használom ezeket az eszközöket, inkább háromdimenziós, valós térben, több érzékszerv bevonásával teszem élményszerűbbé a tanulást, konkrét játékok útján és több önálló munkával megoldható feladatot adok a hallgatóknak, hiszen az igazi tanulás, a megfelelő motiválás után is nehéz munka. Meg kell tanulnunk önállóan és egymástól is tanulni.

Végül szeretném megköszönni Dr. Ambrus Andrásnak, aki nem csak a tanárom volt, de mára már jó baráttá is vált, azt, hogy nem hagyott szélsőségesen dicsőíteni egy-egy tanítási módszert, hanem megvizsgáltatta velem az esetleges hátrányokat is, ezáltal terelve mindig az 'aranyközépút' felé, amely segít elkerülni a szélsőségeket és a siker felé terel.

Kívánok kedves barátomnak, Andrásnak még hosszú és egészségesen eltöltött éveket és lehetőséget arra, hogy mérhetetlen tudását még sokáig minél szélesebb körökben terjeszthesse.

Egy idézettel zárom soraim: „A matematika a legbiztosabb módszer a halhatatlanságra. Ha jelentős matematikai felfedezést teszel, még akkor is emlékezni fognak rád, amikor már mindenki mást elfelejtettek." - Erdős Pál.

Szakirodalom

1. Ambrus András: A matematika tanulás-tanítás néhány kognitív pszichológiai kérdése.

GRADUS 2:(2) pp. 63-73. (2015)

2. Ambrus András: A magyar matematikadidaktika fejlődésének néhány aspektusa

POLYGON 20:(1) pp. 9-16. (2011)

3. Erika Gyöngyösi-Wiersum: Eternal values in a changing world

In: Körtesi Péter (szerk.) Proceedings of the History of Mathematics and Teaching Mathematics Conference. Konferencia helye, ideje: Eger, Magyarország, 2016.05.19-2016.05.22. Miskolc: Junior Mathematical Society Miskolc, 2016. pp. 99-105.
(ISBN:978-693-12-5552-2)

4 .Erika Gyöngyösi, Jan Philip Solovej, Carl Winsløw : Using CAS based work to ease the transition from calculus to real analysis

In: Pytlak Marta, Rowland Tim, Swoboda Ewa (szerk.)

Proceedings of the VIIth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education. Konferencia helye, ideje: Rzeszów, Lengyelország, 2011.02.09-2011.02.13. Rzeszów: University of Rzeszów, 2011. pp. 2002-2011.

Szerzői lista

Szentgyörgyiné Szlovák Mária
igazgató, KEVI Kiskőrös
szlovak.maria@gmail.com

Darin Ildikó
volt kiskőrösi diák

Dávid Mária
néprajzos Kecskemét
maria.davidkrisko@gmail.com

Kriskó János
ny. főiskolai tanár, Kecskemét
krisko.janos@tfk.kefo.hu

Boldoczki Sándorné Domokos Margit Tünde
ny. matematika-fizika szakos középiskolai tanár
tunde@boldoczki.com

Kelemen Ildikó
igazgatóhelyettes, KEVI Kiskőrös
kelike@freemail.hu;

Bogáromi Dávid
matematikus egyetemi hallgató, ELTE TTK
einstein_bogdav@msn.com

Budai László
tanár, Budapesti Gazdasági Egyetem
budai0912@gmail.com

Tihanyi (Szikora) Klára
igazgatóhelyettes Szeged
tihkla@gmail.com

Ambrus Gabriella
adjunktus, ELTE TTK
ambrusg@cs.elte.hu

Árokszállási Eszter
középiskolai tanár, Paks
arokszallasieszter@gmail.com

Baranyai Tünde
egyetemi adjunktus, BBTE Szatmárnémeti Tagozat
baratun@yahoo.com

Csikos Csaba
egyetemi docens, oktatási dékánhelyettes, ELTE-TÓK
csikos.csaba@tok.elte.hu

Csányi Petra, Fábián Kata, Szabó Zsanett
volt ELTE TTK hallgatók
csnyipetra@gmail.com

Danyi Béla
volt ELTE TTK hallgató
danyibeci@gmail.com

Debrenti Edit
egyetemi adjunktus, PKE Nagyvárad
edit.debrenti@gmail.com

Kónya Eszter
egyetemi docens, Debreceni Egyetem,

Kiss Márton
egyetemi hallgató Debreceni Egyetem
eszter.konya@science.unideb.hu

Kézér Ildikó
középiskolai tanár, Budapest Árpád Gimnázium
kezerildi@freemail.hu

Kovács Zoltán
egyetemi docens, Nyíregyházi Egyetem
kovacsz@science.unideb.hu

Kosztolányi József
egyetemi docens, Szegedi Egyetem
kosztolanyi@math.u-szeged.hu

Lajkó Károly
egyetemi docens, Debreceni Egyetem
lajko@science.unideb.hu

Nagy Ildikó Anna
középiskolai tanár, Gyula
nagyildikoanna@freemail.hu

Olosz Ferenc
középiskolai tanár, Szatmárnémeti
oloszfe@gmail.com

Oláhné Téglási Ilona
egyetemi adjunktus Eszterházy Károly Egyetem Eger
teglasi.ilona@uni-eszterhazy.hu

Pintér Klára
főiskolai docens, Szegedi Egyetem
pinterk@jgypk.u-szeged.hu

Szilágyiné Szinger Ibolya
főiskolai tanár, rektorhelyettes, Eötvös Józsbr
t4242m@gmail.com

Tarcsi Margit
főiskolai docens, Református Tanítóképző Kar Debrecen
tarcsim@kfrtkf.hu

Tóth Mariann
középiskolai tanár, Fazeka Mihály Gimnázium Debrecen
t4242m@gmail.com

Tuzson Zoltán
matematika tanár, Székelyudvarhely
tuzo60@gmail.com; tzoli@refkol.ro

Wiersumné Gyöngyösi Erika
főiskolai docens, Eszterházy Károly Egyetem
Főiskolai Kar Sárospatak
wiersumne.erika@uni-eszterhazy.hu

Tartalom

Szentgyörgyiné Szlovák Mária:
Dr. Ambrus András 5

Darin Ildikó:
Ambrus András életútja
Kiegészítés az életúthoz 2010 – 2017 9

Dávid Mária:
Ambrus Andrásnak, kedves tanáromnak 19

Kriskó János:
Kedves Bandi Bátyám 21

Boldoczki Sándorné Domokos Margit Tünde:
Az élet, a tanár, és a matematika 23

Alföldi Géza:
Csak a gyökér kitartson 35

Kelemen Ildikó 37

Bogáromi Dávid 43

Budai László:
A példaképek fontossága az életben 47

Tihanyi (Szikora) Klára 53

Ambrus Gabriella:
Feladatkészítés valós szituációhoz a matematika órán – tapasztalatok magyar tanulók és tanár szakos hallgatók körében 57

Váci Mihály:
Jegenye-fényben 75

Árokszállási Eszter:
Hogyan segíthetünk az átlagos képességű és a matematikában tehetséges tanulóknak egyszerre? 77

Baranyai Tünde:
Mértani ismeretek tanítása Erdélyben régen és ma 95

Csíkos Csaba:
Visszatérés négy matematikadidaktikai kérdéshez 105

Csányi Petra – Fábián Kata – Szabó Zsanett:
Mitől irracionális a gyök 2? 121

Danyi Béla:
Kapcsolatom Ambrus Andrással 133

Debrenti Edit:
Problémamegoldás tanítása tanítóképzős hallgatóknak 147

Kiss Márton – Kónya Eszter:
Mi a sorsa egy megtanított ismeretnek? 163

Váci Mihály:
Eső homokra 177

Kézér Ildikó:
Egy csoda a sok közül, avagy a köbszámok összege 179

Kovács Zoltán:
Támogatja – e a felfedezésen alapuló matematikatanulást a dinamikus geometriai környezet? 191

Kosztolányi József:
Törtfa és a „Törpe törtek" vizsgálata 211

Lajkó Károly:
Matematika- és informatika-didaktika doktori képzés 223

Nagy Ildikó írása 241

Olosz Ferenc:
Ötletek a geometria tanításához 271

Oláhné Téglási Ilona:
Miért kellenek nekünk a definíciók? 287

Pintér Klára:
A szöveges feladatok különböző reprezentációi és tanításuk 303

Arany János:
Epilogus 321

Szilágyiné Szinger Ibolya:
Ambrus Andrásnak 75. születésnapjára 325

Tarcsi Margit:
Hány óra van? 341

Tóth Mariann:
A geometria egy lehetséges bevezetése felfedeztető matematikaoktatás segítségéve 361

Tuzson Zoltán:
Szélsőérték problémák elemi megoldása 371

Wiersumné Dr. Gyöngyösi Erika emlékei 401

Szerző lista 411